1. Sean $\mathbf{x} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{y} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. Hallar y dibujar $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$, y hallar el módulo de estos 3 vectores. Comprobar la desigualdad triangular y la de Cauchy-Schwartz para $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. ¿Forman $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ un ángulo agudo u obtuso entre ellos? Hallar la distancia de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ y el ángulo formado por $\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}+3\mathbf{y}$.

2. Sean $\mathbf{x} = (2,0,-3)$, $\mathbf{y} = (0,1,3)$. Hallar $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$, $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}\times\mathbf{x}$. Encontrar dos vectores unitarios $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ que no sean múltiplo uno del otro y que ambos sean ortogonales a $\mathbf{x}$.

3. Si $\mathbf{a} = \mathbf{i}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$, calcular $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$, $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}-\mathbf{c})$, $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$.

4. a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por $(-2,7)$ y es perpendicular al vector $4\mathbf{i}+\mathbf{j}$.
b) Dar tres expresiones paramétricas distintas del segmento que une los puntos $(-1,0)$ y $(1,1)$.

5. Hallar la ecuación de los planos que cumplen las siguientes propiedades:
a) Pasa por los puntos $(1,3,2)$, $(4,-1,1)$ y $(3,0,2)$.
b) Es perpendicular a la recta $(3,0,2)\,t + (3,-1,1)$ y pasa por $(5,-1,0)$.
c) Contiene a la recta $(-1,1,2)\,t + (3,2,4)$ y es perpendicular al plano $2x+y-3z+4=0$.

6. Dibujar los siguientes subconjuntos de $\mathbf{R}^2$, identificar su interior, su frontera y su cierre y precisar si son o no abiertos, cerrados, acotados y compactos:

$A=\{(x,y) : |x|<1, |y|\le x^2\}$ $\quad B=\{\mathbf{x} : 1<\|\mathbf{x}\|<2,\ \mathbf{x}\cdot(1,1)<0\}$ $\quad C=\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|=q,\ q\in\mathbf{Q}, q\le 1\}$

7. Si A es un abierto de $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{x}\in A$, probar que $A-\{\mathbf{x}\}$ es abierto.

8. Probar que si A y B son conjuntos abiertos en $\mathbf{R}^n$ entonces $A\cup B$ y $A\cap B$ son también abiertos. ¿Es abierto el conjunto unión de una sucesión infinita de conjuntos abiertos?, ¿lo es su intersección?

9. Con las curvas de nivel y algunas secciones dibujar las gráficas de los siguientes campos escalares:
a) $f(x,y)=4-2x-y$ b) $f(x,y)=|y|$ c) $f(x,y)=4x^2+y^2$ d) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}$

10. Dibujar en el espacio las siguientes superficies:
a) $z^2=4-x^2-4y^2$ b) $z^2=1+x^2+y^2$ c) $z^2=x^2+y^2-1$ d) $z^2=x^2$

11. Obtener información sobre la gráfica de f y estudiar en qué puntos tiene límite si $f(x,y)$ es:
a) $\frac{x^2}{x^2+y^2}$ b) $\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ c) $\log(x^2+y^2)$ d) $\arctan\frac{1}{x^2+y^2}$ e) $\frac{\operatorname{sen} xy}{x^2+y^2}$ f) $\operatorname{th}\frac{x^6}{y^2}$

12. Determinar los puntos en que son continuos los campos escalares:
a) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ b) $\begin{cases} g(x,y) = e^{-1/xy} \\ g(x,0)=g(0,y)=0\end{cases}$ c) $\begin{cases} h(x,y)=\frac{1}{xy}\operatorname{sen}(xy) \\ h(x,0)=h(0,y)=1\end{cases}$

13. ¿Es posible definir $f(0,0)$ de modo que $f(x,y)=\frac{x^2y\,e^{-y}}{x^4+4y^2}$ sea continua en $\mathbf{R}^2$?

14. Probar que $f(x,y)\to L$ si $(x,y)\to(a,b) \Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y)) = L$ (límites iterados).
Sea $f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$ si $x\ne -y$. Demostrar que f no tiene límite en $(0,0)$ calculando los límites iterados.
Sea $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$. Probar que los límites iterados coinciden, pero que no tiene límite en $(0,0)$.

15. Hallar, si existen, los límites de a) $f(x,y,z)=\frac{1-e^{xyz}}{x}$, b) $g(x,y,z)=\frac{x^2-1}{y+z-1}$, cuando (x,y,z) tiende a: i) $(0,0,0)$, ii) $(0,1,0)$, iii) $(1,1,1)$, iv) $(1,1,0)$.

1. Hallar f_x y f_y en todos los puntos en que estén definidas para:

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{3x+x^4y^2} \qquad g(x,y)=\log|y-x^2| \qquad \begin{cases} h(x,y)=\frac{1}{xy}\,\mathrm{sen}(xy) \\ h(x,0)=h(0,y)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} k(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ k(0,0)=0 \end{cases}$$

2. Sea $f(x,y)=\frac{x^2}{y}$, $f(x,0)=0$. Dibujar sus curvas de nivel. Precisar el conjunto de puntos en que f es continua. Calcular, si existen, el ∇f y la derivada según el vector $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ en i) $(0,0)$ y en ii) $(1,1)$.

3. Hallar los puntos de la circunferencia $x^2+y^2=1$ y las direcciones en las que $f(x,y)=3x^2+y^2$ varía más rápidamente.

4. Sean: a) $f(x,y)=xy$; b) $g(x,y)=y^2$; c) $h(x,y)=(x^2+y^2)^{-1}$. Dibujar algunas curvas de nivel y el vector gradiente ∇f en algunos puntos. Hallar la la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1)$.

5. Sea $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. Comprobar que $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. ¿Tiene f plano tangente en el origen?

6. Sea $f(x,y)=y\ \mathrm{sen}\,\frac{1}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Estudiar en qué puntos: a) es continua, b) existen las parciales, c) es diferenciable. Hallar (si existe) la derivada de f según $\mathbf{v}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ en el punto $(1,0)$.

7. Sea $f(x,y)=\frac{x^3}{y-1}$, $f(x,1)=0$. Estudiar si f es continua y diferenciable en el punto $(0,1)$. Precisar en la dirección de qué vector unitario es mínima la derivada direccional en el punto $(1,0)$. Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,0)$.

8. Sea $f(x,y)=\frac{2xy+y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$. Estudiar si tiene derivadas parciales, si es continua y si es diferenciable en $(0,0)$. Hallar un $\overline{u}$ unitario tal que $D_{\overline{u}}f(-2,2)=0$.

9. Precisar si i) son continuos, ii) tienen derivadas parciales, iii) son diferenciables, en el punto $(0,0)$:

$$f(x,y)=(y-x^3)^{1/3} \qquad \begin{cases} g(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \\ g(0,0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} h(x,y)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ h(0,0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} k(x,y)=\frac{3x^2y^2-x^6}{x^2+y^2} \\ k(0,0)=0 \end{cases}$$

10. Sea $f(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^{2x-z}$. Hallar $\nabla f(1,-1,2)$ y escribir uno de los infinitos vectores unitarios $\mathbf{u}$ para los que la derivada de f en $(1,-1,2)$ en la dirección del vector $\mathbf{u}$ es 0.

11. Sea $f(x,y,z)=ax^2y+by^2z+cz^2x$. Hallar las constantes a, b y c para las que la derivada direccional en el punto $(1,1,1)$ es máxima en la dirección de $\mathbf{u}=(1,5,0)/\sqrt{26}$ y vale 13.

12. Calcular la derivada direccional de $f(x,y,z)=\arctan(xy)-zy$ en el punto $(0,1,1)$ en la dirección del vector $(3,0,4)$ y la ecuación del plano tangente a $f(x,y,z)=0$ en el mismo punto.

13. Hallar los planos tangentes a laa superficies en los puntos que se indican:
a) $z=x^2+y^3$ en $(3,1,10)$ b) $x^2+(y-2)^2+2z^2=4$ en $(1,3,-1)$ c) $yz=\log(x+z)$ en $(0,0,1)$

14. Calcular las derivadas parciales de segundo orden:

$$f(x,y)=x^5y-x^2y^4 \qquad g(x,y)=x\,\mathrm{e}^{x-y} \qquad h(x,y)=\frac{\cos(xy)}{x} \qquad k(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

15. Sea $f(x,y)=\frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. Hallar f_x y f_y si $(x,y)\neq(0,0)$. Probar que $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$. ¿Por qué las derivadas cruzadas no coinciden en $(0,0)$?

16. Comprobar que las siguientes funciones $u(x,t)$ satisfacen la 'ecuación de ondas' $u_{tt}-u_{xx}=0$:
a) $u(x,t)=\mathrm{sen}(x-t)$ b) $u(x,t)=\mathrm{sh}\,2t\,\mathrm{ch}\,2x$ c) $u(x,t)=\arctan(x+t)$ d) $u(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\mathrm{e}^{-s^2}ds$

17. Hallar los desarrollos de Taylor de orden 2 en torno a los puntos que se indican:
a) $f(x,y)=(x-y)^2$ en $(1,2)$ b) $g(x,y)=\frac{1}{1+x^2+y^2}$ en $(0,0)$ c) $h(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\cos(x+y)$ en $(0,\pi)$

18. Sea la curva descrita por $\mathbf{c}(t)=(e^t,\,t^2)$, $t\in[-2,2]$. Hallar: i) expresiones de la recta tangente en el punto $(e,1)$, ii) un vector unitario normal a la curva en ese punto, iii) el vector aceleración para $t=0$, iv) el punto de corte y el ángulo de interseccion con la curva $\mathbf{r}(s)=(s,s-1)$, $s\in[0,5]$.

19. Una chinche viaja por el plano xy . La temperatura en (x,y) es de e^{-x-2y} grados. Cuando la chinche está en $(0,0)$ se mueve hacia el este a velocidad 2 m/minuto y hacia el norte a velocidad 3 m/minuto. Desde el punto de vista de la chinche, ¿con qué rapidez está cambiando la temperatura del suelo?

20. Sean $f(x,y)\in C^2$ y $h(t)=f(e^t,\cos t)$. Utilizando la regla de la cadena hallar la expresión de $h''(t)$ en función de las derivadas de f . Comprobar la expresión anterior en el caso de que $f(x,y)=xy$.

21. Sea $f(x,y)=9-x^2-y^2$. a) Dibujar las curvas de nivel $f=8,5,0,-7$, el corte con $x=0$ y su gráfica. b) Hallar un vector unitario $\mathbf{u}$ tal que la derivada de f en el punto (2,1) en la dirección de $\mathbf{u}$ sea 0 . c) Hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,1)$. d) Si $\mathbf{c}(t)=(2t,t^3)$, hallar la derivada de la función $h(t)=f(\mathbf{c}(t))$ en $t=1$ utilizando la regla de la cadena.

22. Sea $f(x,y)=\frac{x^4}{y^2}$, $f(x,0)=0$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0,1,4$. b) Precisar si f es continua, si tiene derivadas parciales y si es diferenciable en $(0,0)$. c) Hallar un vector unitario $\overline{u}$ tal que $D_{\overline{u}}f(1,-1)=-4$. d) Escribir la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en $(1,-1)$. **e]** Si $\overline{c}(t)=(e^t,\,t-1)$, hallar, mediante la regla de la cadena, la derivada de $h(t)=f(\overline{c}(t))$ en $t=0$.

23. Sean $\mathbf{f}(u,v)=(e^{u+2v},2u+v)$ y $\mathbf{g}(x,y,z)=(2x^2-y+3z^3,2y-x^2)$. Calcular la matriz de la diferencial de $\mathbf{f}\circ\mathbf{g}$ en $(2,-1,1)$, i) utilizando la regla de la cadena, ii) componiendo y diferenciando.

24. Sea $f(x,y)=\frac{x+y}{1+xy}$. a) Hallar el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0,2)$ y la recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por dicho punto. b) Si $h(u,v)=f(u^3+v^2-1,e^v+1)$, hallar la derivada direccional de h según el vector $(1/\sqrt{2}\,,-1/\sqrt{2}\,)$ en el punto $(u,v)=(1,0)$.

25. Escribir, con la regla de la cadena, la ecuación en derivadas parciales $(y-2)u_y-xu_x=x^2y$ en las nuevas variables $s=xy-2x$, $t=x$. Comprobar que es solución $u(x,y)=f(xy-2x)+x^2-x^2y$, $\forall f\in C^1$.

26. Escribir la ecuación en derivadas parciales $y^2u_{yy}-x^2u_{xx}=0$ en las nuevas variables $s=xy$, $t=\frac{x}{y}$. Comprobar que $u(x,y)=f(xy)+x\,g(\frac{x}{y})$, con $f,g\in C^2(\mathbf{R})$, cumple la ecuación.

27. Las ecuaciones $u=f(x,y,z)$, $x=s^2+t^2$, $y=s^2-t^2$, $z=2st$ definen u en función de s y t : $u=F(s,t)$. Expresar las derivadas segundas de F respecto a s y t en función de las derivadas de f (es $f\in C^2$).

28. Sea $w=f(x,y,z)$, $z=g(x,y)$; entonces $w_x=w_x+w_z\,z_x$ y por tanto $w_z\,z_x=0$ con lo que $w_z=0$ ó $z_x=0$ lo que no es cierto en general. ¿Dónde falla el razonamiento anterior?

29. Sean $\mathbf{f}(x,y)=(x^2,1,y^2)$, $g(x,y,z)=z$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, ∇g , Δg , $\operatorname{rot}(\nabla g)$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{f})$, $\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g)$, $\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g)$, $\operatorname{rot}(\nabla(\mathbf{f}\cdot\nabla g))$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(\mathbf{f}\times\nabla g))$. b) Probar que en general es: $\operatorname{rot}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{rot}\mathbf{f}+\nabla g\times\mathbf{f}$, $\operatorname{div}(g\,\mathbf{f})=g\operatorname{div}\mathbf{f}+\nabla g\cdot\mathbf{f}$, y comprobarlo con los campos anteriores.

30. Si $\mathbf{F}(x,y,z)=xy\,\mathbf{i}+y^2\,\mathbf{j}+xz\,\mathbf{k}$, hallar: $\operatorname{div}\mathbf{F}$, $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{F})$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F})$, $\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{F})$.

31. Sean $\mathbf{a}=(-1,0,3)$ y $\mathbf{f}(x,y,z)=(xz,y^2,x)$. a) Calcular: i) $\mathbf{a}\times\mathbf{f}(\mathbf{a})$, ii) el ángulo que forman $\mathbf{a}$ y $\mathbf{f}(\mathbf{a})$, iii) $\operatorname{div}\mathbf{f}$, iv) $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})$, v) $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ y vi) $\mathbf{f}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{f}$. b) Precisar el punto de corte con el plano $z=5$ de la recta perpendicular a la superficie $\operatorname{div}\mathbf{f}=3$ en el punto $\mathbf{a}$.

32. Sea $\overline{f}(x,y,z)=(xz^2,-x^2y,-y^2z)$. a) Hallar $\operatorname{div}\overline{f}$, $\nabla(\operatorname{div}\overline{f})$ y $\operatorname{rot}\overline{f}$. b) Obtener la ecuación del plano tangente y la recta normal a la superficie $\operatorname{div}\overline{f}=0$ en el punto $(3,4,5)$. ¿Corta esa recta alguno de los ejes? c) Hallar $\mathbf{D}\overline{f}$. Si $\overline{c}(t)=(3,5-t^2,5t)$ y $\overline{r}=\overline{f}\circ\overline{c}$, hallar $\overline{c}\,'(1)$ y, con la regla de la cadena, $\overline{r}\,'(1)$.

33. Comprobar que las siguientes funciones $u(x,y)$ satisfacen la ‘ecuación de Laplace’ $\Delta u=0$:

a) $u(x,y)=x^3-3xy^2$ b) $u(x,y)=\operatorname{sen}x\operatorname{ch}y$ c) $u(x,y)=\arctan\frac{y}{x}$ d) $u(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

34. Sea $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$. **a]** Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0\,,1\,,\frac{1}{2}\,,\frac{2}{5}$, y $\nabla f(2{,}1)$. Hallar el vector unitario $\mathbf{u}$ tal que la derivada $D_{\mathbf{u}}f(2,1)$ sea máxima. Hallar $\operatorname{div}(\nabla f)$ en cartesianas y polares.

35. Sea $f(x,y)=1-(x^2+y^2)^{1/4}$. Dibujar aproximadamente su gráfica. Hallar ∇f en cartesianas y polares. Estudiar en qué puntos es f diferenciable. Calcular $\Delta f(0,1)$. Determinar en qué punto del segmento que une $(0,1)$ y $(-2,0)$ y en la dirección de qué vector el campo f crece más rápidamente.

36. Sean $\overline{r}(x,y)=(x,y)$, $r=\|\overline{r}\|$. Probar que: $\nabla(\frac{1}{r})=-\frac{\overline{r}}{r^3}$, $\nabla(\log r)=\frac{\overline{r}}{r^2}$, $\Delta(\frac{1}{r})=\frac{1}{r^3}$, $\Delta(\log r)=0$.

37. Sea $\mathbf{c}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$. Probar que en coordenadas polares $\mathbf{c}''(t)=\mathbf{a}(t)=(r''-r(\theta')^2)\,\mathbf{e}_r+(r\theta''+2r'\theta')\,\mathbf{e}_\theta$. Sea $\mathbf{c}(t)$ definida por $r(t)=2$, $\theta(t)=\log t$, $t\in[1,\mathrm{e}^{2\pi}]$. Dibujar la curva. Calcular $\mathbf{v}(t)$ y $\mathbf{a}(t)$ si $t=1$, $t=\mathrm{e}^{\pi}$ y $t=\mathrm{e}^{2\pi}$. Comprobar el resultado trabajando con la expresión cartesiana de $\mathbf{c}$.

38. Sean: a) $2x^2y-y^3-x^5=0$, b) $x-2\log x+3y-6\log y=4$, c) $y^2-x\,\mathrm{e}^{x-xy}=0$. i) En el punto $(1,1)$, probar que definen a y como función de x , hallar la tangente a la curva en el punto y calcular $y''(1)$. ii) Encontrar puntos de estas curvas en los que no se pueda aplicar el teorema de la función implícita.

39. Sea $x^2-3y^2+2z^2-yz+y=0$. Precisar en qué puntos no define una función $z(x,y)$. Hallar z_x y z_y cuando estén definidas y la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1,1,1)$.

40. Utilizando el teorema general de la función implícita:

a) Hallar la recta tangente a la curva intersección de $z=x^2+y^2$ y $4x^2+y^2+z^2=9$ en el punto $(-1,1,2)$.

b) Probar que $\begin{cases} y^2+2xzu+u^2=4 \\ yzu+x-uv=1 \end{cases}$ define $u(x,y,z)$ y $v(x,y,z)$ cerca de $(1,1,1,1,1)$ y hallar $v_y(1,1,1)$.

41. Precisar dónde el teorema de la función inversa asegura inversa local, estudiar si hay inversa global y dar una expresión para u_x (si existe) derivando implícitamente:

a) $\begin{cases} x=u\cos v \\ y=u\operatorname{sen} v \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=u \\ y=v+u^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=v^2-u^2 \\ y=uv \end{cases}$ d) $\begin{cases} x=\frac{u^2}{u^2+v^2} \\ y=\frac{v^2}{u^2+v^2} \end{cases}$ e) $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{v+w} \\ y=u-w \\ z=u-v \end{cases}$

42. Sea $f(x,y)=x\operatorname{sen}2y$. Hallar $\mathbf{v}$ unitario tal que $D_{\mathbf{v}}f(1,0)$ sea: i) máxima, ii) mínima, iii) 0, iv) 1. Hallar su desarrollo de Taylor de orden 2 en $(0,0)$ y precisar si tiene o no un extremo local en ese punto.

43. Localizar y clasificar los puntos críticos de:

a) $f(x,y)=3x-3y-x^2+xy-y^2$ b) $g(x,y)=x^4+y^4-(x+y)^2$ c) $h(x,y,z)=x^4+2x^2+y^2+3z^2-2y$

44. Determinar p sabiendo que $f(x,y)=x^3+x^2y+y^2+2y+p$ tiene un mínimo local con valor 0 .

45. Hallar los extremos de $f(x,y)=1-2x^2+xy-y^2$ sobre: i) $x^2+y^2\le 1$, ii) $y+x^2=4$, iii) $y^2-x^2+2x=1$.

46. Sea $g(x,y)=y^3-2x^2+2xy-2y^2$. a) Encontrar sus extremos locales. ¿Tiene extremos absolutos? b) Hallar los puntos críticos de g sobre $y-2x=1$ ulizando multiplicadores de Lagrange. c) Justificar que $g(x,y)=0$ define una función $y(x)$ de C^1 cerca de $(0,2)$ y hallar la recta tangente a $y(x)$ en ese punto. d) Si $\overline{\mathrm{c}}(t)=(t-1,t+t^2)$ y $h(t)=g(\overline{\mathrm{c}}(t))$, calcular $h'(1)$ utilizando la regla de la cadena en $\mathbf{R}^n$.

47. Sea A la región interior a la elipse $5x^2+6xy+5y^2=8$. a) Hallar el punto de la elipse con coordenada x máxima. b) Calcular las distancias máxima y mínima de los puntos de ∂A al origen de coordenadas. c) Encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ sobre A .

48. Calcular los extremos absolutos de $f(x,y,z)=x-y+2z$ en la región $x^2+y^2+2z^2\le 2$.

49. La suma de tres reales positivos es 27 . Encontrar su producto máximo.

50. Hallar los puntos de la curva intersección de $x^2+z^2=2$ e $y+z=0$ que hacen máximo y mínimo el valor de $f(x,y,z)=2x+3y+z$.

1. Calcular los valores de las siguientes integrales sobre el rectángulo $R=[0,1]\times[0,1]$:

a) $\iint_R (x^2+y^2)\,dx\,dy$ b) $\iint_R y\,e^{xy}dx\,dy$ c) $\iint_R (xy)^2\cos x^3\,dx\,dy$

2. Calcular las integrales dobles $\iint_D f\,dx\,dy$ de las f que se dan en los recintos $D\subset\mathbf{R}^2$ que se indican:

a) $f(x,y)=\log(xy)$, D rectángulo $[1,2]\times[1,2]$.

b) $f(x,y)=x^3y$, D región acotada por el eje y y $x=4-y^2$.

c) $f(x,y)=xy$, D región encerrada entre $y=x$ e $y=x^2$.

d) $f(x,y)=e^{x-y}$, D cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(2,2)$, $(0,2)$ y $(-1,0)$.

e) $f(x,y)=\operatorname{sen} x$, D triángulo limitado por las rectas $y=0$, $y=x$ e $y=\pi-x$.

f) $f(x,y)=x$, D triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,5)$ y $(-3,7)$.

g) $f(x,y)=x^3$, D círculo unidad.

3. Sea $R=[0,1]\times[0,2]$. Calcular $\iint_R |x-y|\,dx\,dy$

4. Evaluar la integral $\int_0^2\int_y^2 e^{x^2}dx\,dy$ cambiando el orden de integración.

5. Calcular la integral de la función $f(x,y)=x^2+2xy^2+2$ sobre la región del plano acotada por la gráfica de $y=x-x^2$, el eje x y las rectas $x=0$ y $x=2$.

6. Calcular $\iint_D (2x-y)^3\,dx\,dy$, con D cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,2)$ y $(1,2)$ de dos formas: i) directamente, ii) haciendo el cambio $u=2x-y$, $v=y$.

7. Calcular mediante el cambio de variable $u=y-x$, $v=y+x$, la integral $\iint_D e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy$, con D región acotada por los ejes y la recta $x+y=2$.

8. Calcular el área de la región D limitada en $x\geq 0$ por $y=x$, $y=x-6$, $y=-x^2$, $y=2-(x-2)^2$, i) integrando directamente en cartesianas, ii) haciendo el cambio: $x=u+v$, $y=v-u^2$.

9. Hallar $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$ con D región del primer cuadrante acotada por las curvas $\begin{array}{l} xy=1,\ x^2-y^2=1 \\ xy=2,\ x^2-y^2=4 \end{array}$.

10. Trabajando en coordenadas i) cartesianas y ii) polares, hallar las siguientes integrales dobles $\iint_D f$:

a) $f(x,y)=x^2y$, D parte del círculo $x^2+y^2\leq 1$, con $x,y\geq 0$.

b) $f(x,y)=x$, D región definida por $x^2+y^2\leq 2$, $x\geq 1$, $y\geq 0$.

c) $f(x,y)=x(x^2+y^2)^{-1/2}$, D región del primer cuadrante limitada por $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=4$.

11. Calcular la integral impropia $\iint_M \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$, siendo $M=[-1,1]\times[-1,1]$.

12. Sea $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x$. a) Estudiar si tiene derivadas parciales y si es diferenciable en $(0,0)$.
b) Dibujar la curva de nivel $f(x,y)=1$ y precisar para qué vector $\overline{u}$ unitario es mínima $D_{\overline{u}}f(0,-1)$.
c) Hallar $\iint_D f$, siendo D el semicírculo $x^2+y^2\leq 1$, $y\leq x$.

13. Sea $f(x,y)=\frac{y}{x+1}$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0,1,-1$, hallar $\nabla f(0,1)$, $\Delta f(x,y)$ y la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección de $\mathbf{v}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.
b) Calcular la integral $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D la región acotada por $x=0$, $y=1$ y $x=y^2$.

14. Sea $f(x,y)=\frac{y}{x^2}$. a) Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0,1,-1$, hallar $\nabla f(0,1)$, $\Delta f(x,y)$ y la derivada de f en el punto $(0,1)$ en la dirección de $\mathbf{v}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$.
b) Calcular la integral $\iint_D f\,dx\,dy$, siendo D el triángulo de vértices $(1,0)$, $(2,0)$ y $(1,1)$.

15. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z=x^2+y$ sobre el rectángulo $[0,1]\times[1,2]$.

16. Sea $g(x,y)=2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}$. a) Dibujar su corte con $x=0$ y su gráfica. ¿Es g diferenciable en $(0,0)$?
b) Calcular el volumen del recinto limitado por la gráfica de g y el plano $z=1$.

17. Determinar el centroide de las regiones:

a) $\{0\le y\le \operatorname{sen}^2 x,\ 0\le x\le\pi\}$ b) $\{\sqrt{x}+\sqrt{y}\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$

18. Hallar el centro de masas de una lámina de densidad $\rho(r,\theta)=\cos\theta$ que ocupa la región $r\le\cos\theta$.

19. a) Hallar la distancia media de los puntos del círculo al centro del círculo.
b) Hacer el mismo cálculo para la distancia: $d\big((x,y),(x',y')\big) = |x-x'| + |y-y'|$.

20. Calcular $\iiint_B (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, donde $B=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

21. Calcular $\iiint_V x^2\cos z\,dx\,dy\,dz$, con V región acotada por los planos $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $x=0$, $x+y=1$.

22. Calcular $\iiint_V \mathrm{e}^y\,dx\,dy\,dz$, con V sólido limitado por los planos $x=0$, $x=2$, $y=1$, $z=0$, $y+z=0$.

23. Calcular $\iiint_V \mathrm{e}^{-z}\,dx\,dy\,dz$, con V sólido acotado en $x\ge 0$, $y\ge 0$ por $x=y$, $z=0$ e $y^2+z=1$.

24. Calcular $\iiint_V xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo V el sólido limitado en $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$ por los planos $y=x$ y $x=1$ y la superficie $z=xy$.

25. Dados los puntos $P=(0,2,-4)$ en rectangulares, $Q=(4,\frac{4\pi}{3},3)$ en cilíndricas y $R=(\sqrt{2},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ en esféricas, escribir cada uno de ellos en los dos sistemas de coordenadas restantes.

26. Dibujar los siguientes conjuntos y expresarlos en los otros dos sistemas de coordenadas:

$A=\{(x,y,z):\ x=0,\ z=-2y\}$ $B=\{(r,\theta,z):\ r=1\}$ $C=\{(\rho,\theta,\phi):\ \phi\le\frac{\pi}{4},\ \rho\le 1\}$

27. Calcular $\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$, con V sólido limitado por las superficies:
a) $x^2+y^2=1$, $z=0$ y $z=x^2+y^2$.
b) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

28. Calcular el volumen de las siguientes regiones ulizando más de un sistema de coordenadas:

a) región limitada por el cilindro $x^2+y^2=1$ y los planos $z=0$ y $z=y+2$.

b) región acotada por el cilindro $x^2+y^2=1$, el plano $z=0$ y la superficie $z+x^2=1$.

c) región encerrada entre las superficies $z=x^2+y^2$ y $x^2+y^2+z^2=2$.

29. Calcular la integral de $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-3/2}$ sobre el sólido acotado por las superficies esféricas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, con $0<b<a$.

30. Calcular el momento de inercia de una esfera de densidad constante respecto de su diámetro.

1. Deducir fórmulas para la longitud de una curva dada por: i) $y=f(x)$, $x\in[a,b]$; ii) $r=f(\theta)$, $\theta\in[\alpha,\beta]$.

2. Hallar la longitud de las curvas:
a) $x=|t|$, $y=|t-\frac{1}{2}|$, $t\in[-1,1]$; b) $x=2\cos t-\cos 2t$, $y=2\operatorname{sen} t-\operatorname{sen} 2t$, $t\in[0,2\pi]$ (cardioide);
c) $y=\log x$, $x\in[1,\mathrm{e}]$; d) $y=x^{2/3}$, $x\in[1,8]$; e) $r=a\theta$, $\theta\in[0,2\pi]$, $a>0$ (espiral de Arquímedes).

3. Sea R la región del primer cuadrante acotada por los ejes coordenados y la curva $r=2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)$. a) Calcular el área de R. b) Hallar la longitud del perímetro de R.

4. Hallar $\int_{\mathbf{c}} f\,ds$ para la f y las curvas que se indican: a) $f(x,y,z)=yz$, $\mathbf{c}(t)=(t,3t,2t)$, $t\in[1,3]$. b) $f(x,y,z)=x+z$, $\mathbf{c}(t)=(t,t^2,\frac{2}{3}t^3)$, $t\in[0,1]$.

5. Un alambre está sobre el tramo de espiral $r=\mathrm{e}^{\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$. En cada punto (r,θ) la temperatura es r. Calcular la temperatura media del alambre.

6. Hallar la masa de un alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$ y el plano $x+y+z=0$, si la densidad en (x,y,z) es x^2 por unidad de longitud.

7. Hallar el área de la superficie generada por el giro de a) $x=y^2$, $y\in[1,2]$ b) $r=1+\cos\theta$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ alrededor del eje x.

8. Hallar $\int_C (x^2+y^2)dx+dy$ siendo C: a) $y=x^2$, $0\le x\le 1$, b) $y=\frac{1}{2}$, $1\le x\le 2$, c) $x=2$, $0\le y\le\frac{1}{2}$.

9. Hallar el trabajo realizado por la fuerza $\mathbf{f}(x,y)=(3y^2+2,16x)$ al mover una partícula de $(-1,0)$ a $(1,0)$ siguiendo la mitad superior de la elipse $b^2x^2+y^2=b^2$. ¿Para qué valor de b es mínimo el trabajo?

10. Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{f}(x,y)=(xy,0)$ entre $(-1,0)$ y $(1,0)$ a lo largo de: a) el eje x, b) $y=1-x^2$, c) $y=|x|-1$, d) la parte inferior de la circunferencia $x^2+y^2=1$. ¿Es $\mathbf{f}$ conservativo?

11. Sea $\mathbf{c}(t)=(t^3,2t^2)$. a) Hallar la longitud del tramo de curva descrita por $\mathbf{c}$ cuando $t\in[-1,0]$.
b) Hallar su recta tangente en $(-1,2)$ y el punto en que esta recta tangente vuelve a cortar la curva.
c) Si $h(x,y)=\mathrm{e}^{2x+y}$, hallar la integral de línea de ∇h desde $(0,0)$ hasta $(1,2)$ sobre la curva dada por $\mathbf{c}$.

12. a) Sea $f(x,y)=x^2-y^2$. Dibujar las curvas de nivel $f(x,y)=0$ y el vector $\nabla f(1,1)$. Hallar la derivada de f en el punto $(1,1)$ según el vector $\mathbf{v}=(-1,-1)$. Hallar $\Delta f(x,y)$. b) Hallar la integral de línea de $\mathbf{g}(x,y)=(2x,-2y)$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$ sobre el tramo de circunferencia $x^2+y^2=1$ con $x,y\ge 0$.

13. Sea D el cuadrilátero de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,-1)$, $(2,-1)$. a) Hallar $\iint_D (x+2y)\,dx\,dy$. b) Hallar la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(1,\cos y)$ a lo largo de la frontera de D, en sentido de las agujas del reloj.

14. Hallar la integral de $\mathbf{f}(x,y)=\left(-\frac{y}{(y+x)^2},\frac{x}{(y+x)^2}\right)$ entre $(0,1)$ y $(1,0)$ a lo largo de la parábola $x=1-y^2$.

15. Sea $\mathbf{f}(x,y)=(5-\frac{x}{x^2+y^2})\,\mathbf{i}-\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathbf{j}$. ¿Existe función potencial para $\mathbf{f}$? Calcular la integral de línea de $\mathbf{f}$ entre $(-1,1)$ y $(1,1)$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=2$.

16. Calcular la integral de $\mathbf{F}(x,y,z)=x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}+z\,\mathbf{k}$ a lo largo de: a) $\mathbf{c}(t)=(t,t,t)$, $t\in[0,1]$. b) $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,0)$, $t\in[0,2\pi]$.

17. Sea $g(x,y,z)=y\,\mathrm{e}^{2x-z}$. a) Hallar $\iiint_V g$, siendo V el sólido acotado por los planos $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=2$, $z=0$ y $z=2-x$. b) Hallar el valor de la integral de línea de i) g, ii) ∇g desde $(0,0,0)$ hasta $(1,2,2)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

18. Sea $f(x,y,z)=y$. a) Calcular $\iiint_V f$, si V es el sólido acotado en $x,y\ge 0$ por $z=x^2+y^2$ y $z=2$.
b) Si C es el corte de $z=x^2+y^2$ con $x=0$, para $y\ge 0$, $0\le z\le 2$, parametrizar la curva C y hallar:
i) $\int_C f\,ds$, ii) $\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{s}$, en el sentido las z crecientes.

19. Sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(xy\,,2x\,,-yz)$. Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. Calcular la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo del camino $\mathbf{c}(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t,1)$, $t\in[0,\pi]$ y la longitud de la curva descrita por $\mathbf{c}(t)$.

20. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=\mathrm{e}^{-z}\,\mathbf{i}+\mathbf{j}-x\mathrm{e}^{-z}\,\mathbf{k}$. a) Calcular directamente la integral de línea de $\mathbf{f}$ desde $(1,1,0)$ hasta $(1,0,3)$ a lo largo del segmento que une los puntos. b) Hallar, si existe, una función potencial para $\mathbf{f}$.

21. Calcular la integral de línea del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{i}+2yz\,\mathbf{j}+y^2\,\mathbf{k}$ entre $(1,0,2)$ y $(0,3,0)$ a lo largo del segmento que une esos puntos. ¿Para alguna curva que una ambos puntos la integral es 0?

22. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=(z^2,2y,cxz)$, c constante. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$ y $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. b) Precisar para qué valor de c deriva $\mathbf{f}$ de un potencial U y calcularlo. c) Para este c, ¿cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ entre $(0,0,0)$ y $(1,0,1)$ a lo largo del segmento que une los puntos?

23. Sea $\mathbf{f}(x,y,z)=y^2\,\mathbf{i}+2xy\,\mathbf{j}-2z\,\mathbf{k}$. a) Hallar $\operatorname{div}\mathbf{f}$, $\operatorname{rot}\mathbf{f}$, $\nabla(\operatorname{div}\mathbf{f})$ y $\Delta(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f})$. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial? b) Hallar $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz$, siendo V el sólido acotado por $z=4-y^2$ y los planos $x=0$, $x=3$ y $z=0$. c) Hallar la integral de línea de $\mathbf{f}$ de $(3,0,4)$ a $(0,2,0)$ sobre la curva $\mathbf{c}(t)=(3-\frac{3t}{2},t,4-t^2)$, $t\in[0,2]$.

24. Sea $\mathbf{f}(x,y)=(1,xy^2)$. ¿Deriva $\mathbf{f}$ de un potencial? Hallar el valor de la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=4$, recorrida en sentido opuesto a las agujas del reloj: i) directamente, tras dar una parametrización, ii) mediante el teorema de Green (integrando en polares).

25. Comprobar el teorema de Green para el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y)=(-xy\,,y)$ en el recinto D limitado por la parábola $y=x^2$ y el segmento que une los puntos $(-1,1)$ y $(2,4)$.

26. Comprobar el teorema de Green para:

a) $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,2x)$ y D la región del plano encerrada entre la parábola $x=4-y^2$ y la recta $y=x-2$.

b) $\mathbf{f}(x,y)=(y^2,xy)$ y D semicírculo girado dada por $x^2+y^2\le 2$ e $y\ge x$.

27. Sea D la región comprendida entre las gráficas de $y=\mathrm{e}^{-x}$, $y=\mathrm{e}^{x-2}$ y el eje y. a) Hallar $\iint_D x\,\mathrm{e}^x\,dxdy$. b) ¿Cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}(x,y)=(xy\,\mathrm{e}^x,1)$ a lo largo de ∂D, en sentido horario?

28. Hallar el área encerrada por el eje x y un arco de la cicloide $x=\theta-\operatorname{sen}\theta$, $y=1-\cos\theta$, $0\le\theta\le 2\pi$.

29. Comprobar los teoremas de Green y la divergencia para el campo vectorial $\mathbf{g}(x,y)=(x^2,-2xy)$ en el triángulo D cuyos vértices son los puntos $(0,0)$, $(2,0)$ y $(0,4)$.

30. Verificar el teorema de la divergencia para:
i) $\mathbf{f}(x,y)=(x,y)$ y D el disco unidad $x^2+y^2\le 1$,
ii) $\mathbf{f}(x,y)=(2xy,-y^2)$ y D el cuadrado unidad.

1. a) Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie $\mathbf{r}(u,v)=(2u,u^2+v,v^2)$ en el punto $(0,1,1)$ a partir del producto vectorial fundamental. b) Escribir la superficie en la forma $z=f(x,y)$ y calcular ese plano utilizando la fórmula del capítulo 2.

2. Comprobar que $\mathbf{r}(u,v)=(\operatorname{ch}u\cos v,\operatorname{ch}u\operatorname{sen}v,\operatorname{sh}u)$, $u\in\mathbf{R}$, $v\in[0,2\pi]$ parametriza el hiperboloide de una hoja $x^2+y^2-z^2=1$. Hallar de dos formas su plano tangente en el punto con $u=0$ y $v=\frac{\pi}{4}$.

3. Hallar el área del toro dado por $\mathbf{r}(\theta,\phi)=\big((2+\cos\phi)\cos\theta,(2+\cos\phi)\operatorname{sen}\theta,\operatorname{sen}\phi\big)$, $\theta,\phi\in[0,2\pi]$.

4. Calcular $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$, siendo S la superficie esférica $x^2+y^2+z^2=4$.

5. Sea S la superficie cilíndrica $x^2+y^2=4$ comprendida entre los planos $z=0$ y $z=3$. a) Hallar el área de S utilizando integrales de superficie. b) Calcular la integral de superficie sobre S de: i) $f(x,y,z)=x^2$, ii) $\mathbf{f}(x,y,z)=(xz,yz,2)$ (respecto de la normal exterior).

6. Sea S la parte de la superficie cónica $z^2=x^2+y^2$ comprendida entre los planos $z=1$ y $z=2$, y sea el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,y,1)$. a) Calcular el área de S y la integral de superficie de $\mathbf{f}$ sobre S respecto de la normal exterior al cono. b) Calcular el $\operatorname{rot}\mathbf{f}$. ¿Cuánto vale la integral de línea de $\mathbf{f}$ a lo largo de la circunferencia que limita superiormente la superficie?

7. Sea V el cubo unidad $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$, S su superficie, y sea $\mathbf{f}(x,y,z)=(x^2,y^2,z^2)$. Comprobar el teorema de la divergencia calculando: $\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz$ e $\iint_S \mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

8. Comprobar el teorema de Gauss para $\mathbf{f}(x,y,z)=4x\,\mathbf{i}+4y\,\mathbf{j}+z^2\,\mathbf{k}$ en el volumen $x^2+y^2\le 25$, $0\le z\le 2$.

9. Sean las superficies $S=\{x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\ge 0\}$ y $B=\{x^2+y^2\le R^2,\ z=0\}$. Comprobar que se verifica el teorema de la divergencia sobre $S\cup B$ para el campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=(\,y,-x,1\,)$.

10. Hallar el flujo del campo vectorial $\mathbf{f}(x,y,z)=3yz\,\mathbf{i}+2xz\,\mathbf{j}+(z+xy)\,\mathbf{k}$, hacia el exterior de la superficie de la esfera $x^2-6x+y^2+z^2=0$.

11. Sea S el triángulo determinado por los puntos $(0,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(-1,1,1)$ y $\mathbf{f}(x,y,z)=(yz,e^y,1)$. Calcular la integral de superficie de $\operatorname{rot}\mathbf{f}$ sobre S directamente y utilizando el teorema de Stokes.

12. Sea S la parte del paraboloide elíptico $z=4-4x^2-y^2$ con $z\ge 0$ y $x\ge 0$, y sea $\mathbf{g}(x,y,z)=(3,x^2,y)$. Comprobar el teorema de Stokes calculando la integral de superficie de $\operatorname{rot}\mathbf{g}$ sobre S y la integral de línea de $\mathbf{g}$ a lo largo del contorno cerrado que limita dicha superficie.

13. Comprobar el teorema de Stokes, calculando las integrales correspondientes, para el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)=-y\,\mathbf{i}+2x\,\mathbf{j}+(x+z)\,\mathbf{k}$ en la parte de la superficie $x^2+y^2+z^2=9$ con $z\ge 0$.

14. Sean V el sólido limitado por el paraboloide $z=1-x^2-y^2$ y el plano $z=0$, S la parte de dicho paraboloide con $z\ge 0$, C la intersección del paraboloide con el plano $z=0$, S^* la superficie de V y $\mathbf{f}(x,y,z)=(x,xy,2z)$. Comprobar que se cumplen los teoremas de Stokes y de la divergencia calculando:

$$\oint_C \mathbf{f}\cdot d\mathbf{s}\,,\quad \iint_S \operatorname{rot}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS\,,\quad \iint_{S^*}\mathbf{f}\cdot\mathbf{n}\,dS \quad \text{e} \quad \iiint_V \operatorname{div}\mathbf{f}\,dx\,dy\,dz\,.$$

15. a) Comprobar que si $u:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ es de C^2 se satisface $u\,\Delta u=\operatorname{div}(u\nabla u)-\|\nabla u\|^2$.

b) Deducir, con el teorema de la divergencia en el plano, que $u\in C^2(D)$ cumple la 'fórmula de Greeen':

$\iint_D u\,\Delta u\,dx\,dy=\oint_{\partial D} u\,\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\,ds-\iint_D \|\nabla u\|^2 dx\,dy$, con $\frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}$ derivada según la normal unitaria exterior.

c) Escribir y probar la fórmula para $\mathbf{R}^3$. d) ¿Qué resultado de $\mathbf{R}$ generalizan estas fórmulas?

(se utilizan demostrando la unicidad de las soluciones de algunas ecuaciones en derivadas parciales).