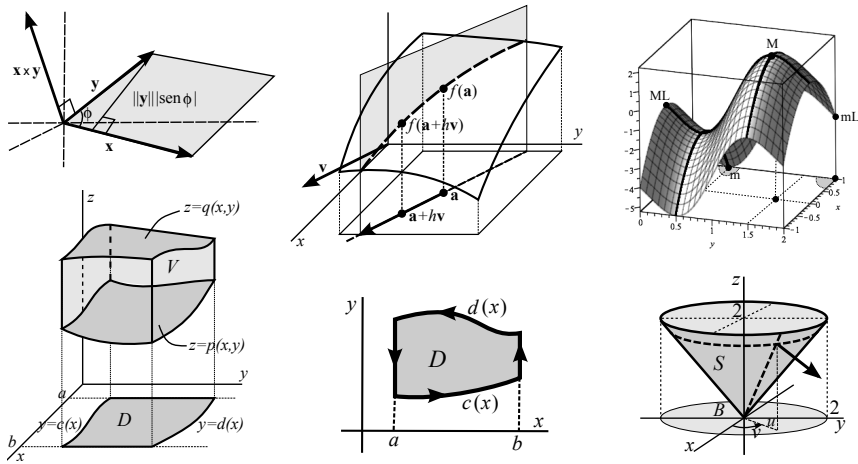


# APUNTES DE CÁLCULO (en varias variables)



**Pepe Aranda**

[pparanda@fis.ucm.es](mailto:pparanda@fis.ucm.es)

<http://jacobi.fis.ucm.es/pparanda>

Departamento de Métodos Matemáticos

Facultad de Físicas. UCM

<https://www.ucm.es/ft2mm>

## Índice

### Bibliografía

#### Sobre estos apuntes

### 1. Conceptos básicos

1.1 El espacio $\mathbf{R}^n$ . Rectas y planos. Abiertos y cerrados.	1
1.2 Gráficas de funciones escalares	5
1.4 Límites y continuidad en $\mathbf{R}^n$	7

### 2. Cálculo diferencial en $\mathbf{R}^n$

2.1 Derivadas de campos escalares	9
2.2 Campos vectoriales. Regla de la cadena	15
2.3 Funciones implícitas e inversas	20
2.4 Extremos de funciones escalares	22

### 3. Integrales múltiples

3.1 Integrales dobles	27
3.2 Integrales triples	32

### 4. Integrales de línea

4.1 Integrales de campos escalares a lo largo de curvas	35
4.2 Integrales de línea de campos vectoriales	37
4.3 Integrales de gradientes y teorema de Green	39

### 5. Integrales de superficie

5.1 Definiciones y cálculo	43
5.2 Teoremas de la divergencia y Stokes	46

<b>Problemas</b>	<b>I-IX</b>
------------------	-------------

## Bibliografía

- [MT] J. E. Marsden y A. J. Tromba. Cálculo Vectorial. Ed. Addison-Wesley  
[R] J. Rogawski. Cálculo Varias Variables. Ed. Reverte  
[St] S. Stein. Cálculo y geometría analítica. Ed. McGraw-Hill  
[LHE] Larson-Hostetler-Edwards. Cálculo II (7a ed). Ed. Pirámide, 2003.  
[A] T. Apostol. Calculus. Ed. Reverté

En todas las asignaturas que imparto suelo elaborar apuntes. Esto tiene la ventaja de precisar qué se va a explicar durante el curso. Además permite al estudiante no estar todo el rato pendiente de copiar lo que se escribe en la pizarra y permite al profesor remitirse a ellos cuando no hay tiempo (ni se cree adecuado) entrar en detalles de demostraciones. Pero tiene sus desventajas. La existencia de apuntes incita a no utilizar casi otros libros, que tratan los diferentes temas con más extensión y rigor, o con más ejemplos, o más aplicaciones. Tampoco se ven otras notaciones distintas que pueden sorprender en otros cursos.

Recomiendo, pues, consultar varios libros. Esta asignatura (a diferencia de otras para las que he escrito apuntes) sí tiene un gran texto al que remitirse y del que he extraído buena parte de varios temas: el Marsden-Tromba. Un libro serio, pero también con muchos ejemplos y aplicaciones. Algunos quizás prefieran libros algo más elementales, como los tres siguientes [R], [St] o [LHE]. Me gustan en ese orden, pero el [R] no está en la biblioteca de Físicas de la UCM (aunque es fácil de encontrar en librerías). Del [St] hay un par de ejemplares (pero ya está descatalogado). Del [LHE] hay bastantes en la biblioteca (aunque las ediciones posteriores a la venta cada vez tienen más colores y lo que me parece más 'paja'). Y no puede faltar en una bibliografía de esta asignatura un clásico como el [A].

## Sobre el contenido de estos apuntes

Los apuntes tienen dos grandes bloques de tamaño similar: el cálculo diferencial en  $\mathbf{R}^n$ , formado por el capítulo 1 y el extenso 2 (los preguntados en el parcial), y el cálculo integral en  $\mathbf{R}^n$  de los 3, 4 y 5.

En concreto, en el 1 se introducen los conceptos básicos (vectores y sus operaciones), se repasan las rectas y planos, se presentan las gráficas de funciones de dos variables y se estudia la continuidad.

En la sección 2.1 se presentan las derivadas de los campos escalares, la diferencial y Taylor de orden 2. En 2.2 se introducen ya las funciones y campos vectoriales (y sus operadores) y la regla de la cadena. Se tratan en 2.3 los más sutiles teoremas de la función inversa e implícita. Y se acaba el capítulo en 2.4 con el estudio de extremos (y de los multiplicadores de Lagrange).

La sección 3.1 estudian las integrales dobles y sus cambios de variable. En 3.2 se ven las triples y se introducen las coordenadas cilíndricas y esféricas.

4.1 trata las integrales de línea de campos escalares y 4.2 las de campos vectoriales. En 4.3 se estudian ya los campos conservativos y el teorema de Green (que en otros textos se ven junto con Stokes).

El último capítulo (el 5) se dedica a las integrales de superficie (de campos escalares y vectoriales) y se terminan los apuntes con los teoremas de Gauss y de Stokes.

Las aproximadamente 60 horas reales de clase de un curso las distribuyo más o menos así entre los 5 capítulos: 9 para el 1, 21 para el 2, 10 para el 3, 12 para el 4 y 8 para el 5.

La base necesaria para seguir estos apuntes es simplemente dominar un buen Cálculo en una variable: tener claro los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral, manejar bien los máximos y mínimos, conocer los desarrollos de Taylor, saber calcular primitivas no muy complicadas (las trigonométricas en particular), dominar las coordenadas polares... No se suponen conocimientos algebraicos, que se estudian en el grado en Física de la UCM al tiempo que esta asignatura (segundo cuatrimestre de 1º), aunque se citen en letra pequeña términos como base o aplicación lineal que luego se irán dominando en Álgebra.

Casi todos los ejemplos son en  $\mathbf{R}^2$  y  $\mathbf{R}^3$  (principalmente en  $\mathbf{R}^2$ : el salto conceptual se da al pasar de 1 a 2, más variables plantean sobre todo complicaciones técnicas). Más de una vez aparecen gráficas hechas con el programa Maple (con licencia universal en la UCM) para incitar a los estudiantes a su uso. Los dibujos los hago con el programa libre Inkscape. Las fuentes del texto (más sólidas que las habituales de  $\text{\LaTeX}$ ) aparecen utilizando el paquete `{newtxtext,newtxmath}`.

## Sobre las versiones de los apuntes

**versión 2016:** Por problemas con impresoras, cambiada la letra a otra tipo ‘times’ más actual (paquete `{newtxtext, newtxmath}` de LaTeX en vez de `{mathptmx}`), lo que implica múltiples retoques estéticos.

Algún ejemplo nuevo y leves retoques en 1.2 y 1.3. Más cambios en 2.1, sobre todo para clarificar la diferenciabilidad (la sección aumenta en una página). Un ejemplo más en polares en 2.2. La sección 2.3 de inversas e implícitas aparece ahora antes que la de máximos y mínimos (con nuevos ejemplos).

Un ejemplo más en 3.1 y casi igual 3.2. Sólo un ejemplo nuevo en el capítulo 4 (de Green). Tres nuevos ejemplos en el 5 (que vienen de exámenes). Y en todos, modificaciones estéticas.

Como cada año, en mis apuntes incluyo en los problemas los de exámenes del curso anterior. Por eso, los del tema 2 pasan de 45 a 50 (y se reordenan) y los del 3 y 4 de 25 a 30. Total, 140 problemas.

**versión 2015:** Primera vez que impartí completa la asignatura ‘Cálculo’ del grado en Física, y, por lo tanto, fue la primera versión de estos ‘**APUNTES DE CÁLCULO (en varias variables)**’.

Tenía apuntes manuscritos de gran parte de ella (de clases del viejo Análisis I de los años 80 cuyo segundo parcial era de cálculo en varias variables, pero, al existir Análisis II, los extremos, las inversas e implícitas, las integrales de superficie... se explicaban en esa asignatura). En 2011 di dos meses de Cálculo en un curso compartido (temas 3 y 4) y elaboré los primeros apuntes para ello. Una versión resumida de gran parte del curso la escribí en 2012 para los Métodos Matemáticos de la Ingeniería de Materiales.

A lo largo de ese curso tuve que extender bastante los apuntes de 1, 2.1 y 2.2 de los ingenieros, escribir a ordenador del todo las secciones 2.3 y 2.4, retocar los capítulos 3 y 4 y expandir el capítulo 5. E inventar bastantes nuevos problemas (y transcribir otros de los hechos con máquina de escribir).

**2012.** Primera versión de las ‘**Notas de Métodos Matemáticos (ingeniería de materiales)**’, asignatura (en su mayor parte de ecuaciones diferenciales) que comienza con 2 capítulos (sólo 5 semanas) de Cálculo en varias variables. Su capítulo 2 (cálculo integral en  $\mathbf{R}^n$ ) incluyó resumidos los apuntes de ‘Integrales múltiples’ y de ‘Integrales de línea’ elaborados para Cálculo en el 2011. Escribí por primera vez en el ordenador su capítulo 1 de cálculo diferencial en  $\mathbf{R}^n$  y su sección 2.3 de integrales de superficie.

**2011.** Primera versión a LaTeX de los temas 3 y 4 transcribiendo los apuntes a mano.

**años 80** (del siglo XX). Empecé a dar clases en el curso 1978-79 (de Análisis I). Un par de años después comenzaría a pasar a mis estudiantes mis apuntes hechos a mano. Los que tengo en papel y escaneados deben ser del 85-86. Pasé la parte de cálculo en una variable hace ya muchos años a ordenador (primero a Word y luego a LaTeX). Pero la de varias variables estuvo mucho tiempo en el archivador.

[Estos apuntes pueden ser utilizados y citados por cualquiera sin ningún problema, siempre que no haga negocio con ellos].