

# 5. Integrales de superficie

## 5.1. Definiciones y cálculo

Generalizamos las integrales de línea (de campos escalares y de campos vectoriales).

Una **superficie** a veces viene dada por  $F(x, y, z) = 0$ . Si se puede despejar la  $z$ , por  $z = f(x, y)$ . Pero lo más general es que se puede describir **paramétricamente** mediante:

$$\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3, \text{ con } \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in D \quad [2 \text{ grados de libertad frente al } \text{único } t \text{ de las curvas}].$$

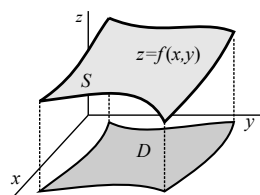
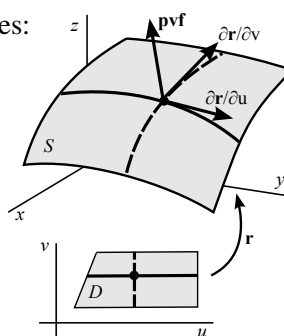
Suponemos que la superficie  $S = \mathbf{r}(D)$  es  $C^1$  [que lo es  $\mathbf{r}$ ]. Entonces:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

serán vectores tangentes a las curvas contenidas en  $S$  obtenidas tomando, respectivamente,  $v = k$  y  $u = k$ . Su producto vectorial

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ será un vector normal a } S. \quad [Y \text{ al plano tangente, si es } \neq \mathbf{0}].$$

producto vectorial fundamental



Si la superficie está escrita en la forma  $z = f(x, y)$  una parametrización posible de  $S$  es  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, f(x, y))$ , con  $(x, y) \in D$  proyección de  $S$  sobre  $z = 0$ . El producto vectorial fundamental queda en este caso:

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x & -f_y & 1 \end{bmatrix}.$$

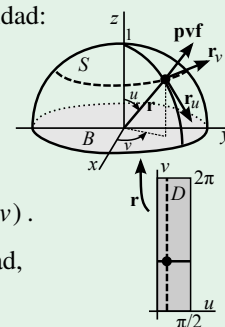
**Ej 1a.** Parametricemos la semisuperficie esférica unidad superior. Una posibilidad:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \cos u \cos v & u \in [0, \frac{\pi}{2}] & \quad \mathbf{r}_u = \cos u \cos v \mathbf{i} + \cos u \sin v \mathbf{j} - \sin u \mathbf{k} \\ y(u, v) &= \cos u \sin v & v \in [0, 2\pi] & \quad \mathbf{r}_v = -\sin u \sin v \mathbf{i} + \sin u \cos v \mathbf{j} \\ z(u, v) &= \cos u \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos u \cos v & \cos u \sin v & -\sin u \\ -\sin u \sin v & \sin u \cos v & 0 \end{vmatrix} = \sin^2 u \cos v \mathbf{i} + \sin^2 u \sin v \mathbf{j} + \sin u \cos u \mathbf{k} = \sin u (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) = \sin u \mathbf{r}(u, v).$$

O podemos parametrizarla:  $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$ , con  $(x, y) \in B$  círculo unidad,

que nos proporciona este otro **pvf**:  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

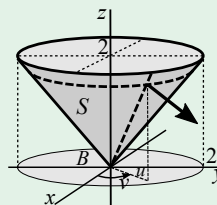


**Ej 2.**  $x = u \cos v$   $u \in [0, 2\pi]$  Por ser  $x^2 + y^2 = z^2$ , describe esa superficie cónica comprendida entre  $z = 0$  y  $z = 2$ .  
 $y = u \sin v$   $v \in [0, 2]$  [ $u = k$  es una circunferencia y  $v = k$  una recta].  
 $z = u$

$$\text{El pfv es aquí: } \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & 1 \\ -u \sin v & u \cos v & 0 \end{vmatrix} = (-u \cos v, -u \sin v, u). \quad [\text{Para } u=0 \text{ el pfv} = \mathbf{0} \text{ y en ese punto no hay plano tangente}].$$

De otra forma:  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2+y^2})$ , con  $(x, y) \in B$  círculo de radio 2.

Siendo ahora el producto vectorial fundamental:  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-x(x^2+y^2)^{-1/2}, -y(x^2+y^2)^{-1/2}, 1)$ .

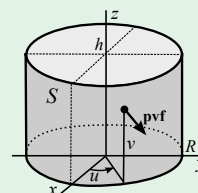


**Ej 3.**  $x = R \cos u$   $u \in [0, 2\pi]$  Describe una superficie cilíndrica de radio  $R$   
 $y = R \sin u$   $v \in [0, h]$  (pues  $x^2 + y^2 = R^2$ ) y de altura  $h$ .  
 $z = v$

$$\text{Como } \mathbf{r}_u = (-R \sin u, R \cos u, 0) \text{ es } \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = R (\cos u, \sin u, 0).$$

$$\mathbf{r}_v = (0, 0, 1)$$

No se puede escribir como  $z = f(x, y)$  [si, por ejemplo, como  $y = \pm \sqrt{R^2 - x^2}$ ].



## Integrales de superficie de campos escalares

Sea  $S$  la superficie  $C^1$  dada por  $\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  inyectiva y sea  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$  tal que  $f(\mathbf{r}(u, v))$  es continua. Entonces:  $\iint_S f dS \equiv \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| du dv$ .

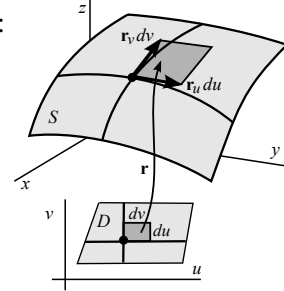
[Si  $S$  está formada por varias superficies  $C^1$  se suman las integrales].

Como en las de línea, se prueba que la integral de una  $f$  escalar sólo depende de la superficie y no de cómo se parametrice. La notación  $\iint_S f dS$  es, pues, inequívoca.

Si  $f \equiv 1$  el valor de la integral representa el **área de la superficie  $S$** :

$$\text{Área de } S: \quad A = \iint_S dS = \iint_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv.$$

[Pues un rectángulo  $du dv$  de  $D$  se convierte en un diferencial  $dS$  de superficie aproximadamente igual al rectángulo dado por los vectores  $\mathbf{r}_u du$  y  $\mathbf{r}_v dv$ , cuyo área es el módulo de su producto vectorial].



Para una superficie  $z = f(x, y)$  queda:  $A = \iint_D \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} dx dy$ .

**Ej 1b.** Hallemos la integral de  $f(x, y, z) = z^2$  sobre la semisuperficie esférica  $S$  del ejemplo 1a.

Primero con  $\mathbf{r}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ .  $\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| = |\sin u| \|\mathbf{r}\| = \sin u$  [ $\mathbf{r}$  es unitario y  $\sin u \geq 0$ ].

$$\text{Por tanto, } \iint_S z^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^2 u \sin u du dv = \frac{2\pi}{3} [-\cos^3 u]_0^{\pi/2} = \frac{2\pi}{3}.$$

Con la parametrización  $(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$  el módulo del producto vectorial fundamental resulta ser:

$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \left[ \frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1 \right]^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \Rightarrow$$

$$\iint_S z^2 dS = \iint_B \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr d\theta = \frac{2\pi}{3} [-(1-r^2)^{3/2}]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Veamos que la integral de superficie nos calcula bien el **área** de  $S$ :

$$A = \iint_S 1 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin u du dv = 2\pi [-\cos u]_0^{\pi/2} = 2\pi \quad [\text{el de toda la superficie esférica era } 4\pi \cdot 1^2].$$

Como siempre, los cálculos se complican si se usan las cartesianas en vez de las esféricas:

$$A = \iint_S dS = \iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2} dr d\theta = 2\pi [-(1-r^2)^{1/2}]_0^1 = 2\pi.$$

[impropias convergentes]

Al margen de integrales, como el **pvf** es un vector  $\mathbf{n}$  normal a la superficie, nos proporciona una tercera forma (además de las vistas en 2.1) de calcular el plano tangente a dicha superficie.

Por ejemplo, el plano tangente a  $S$  en el punto  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  [para  $u = v = \frac{\pi}{4}$ ] se puede hallar así:

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \left( \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (1, 1, \sqrt{2}) \rightarrow (1, 1, \sqrt{2}) \cdot \left( x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 0, \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}} (2 - x - y).$$

**Ej 4.** Si  $S$  es la porción de la superficie  $z = x + y^2$  sobre el triángulo  $D$  dado por  $0 \leq y \leq 1$  y  $0 \leq x \leq y$ , hallemos su área e  $\iint_S (z-x) dS$ .

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x + y^2) \rightarrow \mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (-1, -2y, 1)$$

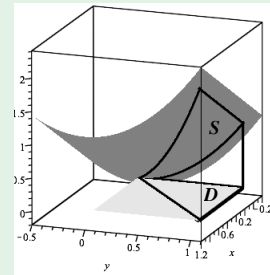
$$\|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| = \sqrt{4y^2 + 2} \quad [ = ((f_x)^2 + (f_y)^2 + 1)^{1/2} ] \rightarrow$$

$$A = \iint_D \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx dy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{4y^2 + 2} dx dy = \int_0^1 y \sqrt{4y^2 + 2} dy = \left[ \frac{1}{12} (4y^2 + 2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \sqrt{6} - \frac{1}{6} \sqrt{2} \approx 0.99.$$

[La presencia de la raíz muchas veces, no aquí, conduce a integrales complicadas o no calculables].

$$\iint_S (z-x) dS = \iint_D y^2 \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y\| dx dy = \int_0^1 \int_0^y y^2 \sqrt{4y^2 + 2} dx dy = \int_0^1 y^2 y \sqrt{4y^2 + 2} dy = \int_0^1 y^3 \sqrt{4y^2 + 2} dy$$

$$= \frac{1}{32} \int_2^6 (u-2) \sqrt{u} du = \frac{1}{32} \left[ \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{4}{3} u^{3/2} \right]_2^6 = \frac{1}{5} \sqrt{6} + \frac{1}{30} \sqrt{2} \approx 0.54.$$



## Integrales de superficie de campos vectoriales

Sea  $S$  la superficie de  $C^1$  dada por  $\mathbf{r}: D \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$  inyectiva y sea  $\mathbf{f}: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  continua sobre  $S$ . Entonces:  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} \equiv \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) du dv$ .

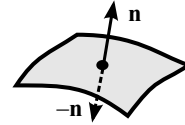
Observemos que la integral anterior, si  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal a la superficie con el mismo sentido que el producto vectorial fundamental, se puede escribir así:

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \mathbf{n}(u,v) \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| du dv = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Esta expresión simplifica a veces algún cálculo y además clarifica el significado físico de este tipo de integrales: el **flujo** del campo vectorial  $\mathbf{f}$  **a través de la superficie**  $S$ .

Como sucedía con las las integrales de línea de los campos vectoriales, se puede demostrar que, **salvo el signo**, esta integral **es independiente de la parametrización**.

Hay dos vectores unitarios normales a una superficie orientada:  $\mathbf{n}$  y  $-\mathbf{n}$  (que conste que hay superficies no orientadas como la banda de Moebius). Parametrizaciones diferentes proporcionan **pvf** que pueden tener el sentido de uno u otro. Si nos dan el mismo, las integrales coinciden. Si no, tienen el signo opuesto.  $\mathbf{f}$ ,  $S$  y el sentido de la normal sí determinan la integral.



[Una notación más precisa sería, pues:  $\iint_{\mathbf{r}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ , incluyendo explícitamente la parametrización].

**Ej 1c.** Integremos  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  sobre la semisuperficie esférica  $S$  de 1a, con los  $\mathbf{r}$  de siempre.

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{r}(u, v) \cdot [\text{sen } u \mathbf{r}(u, v)] du dv \stackrel{\mathbf{r} \text{ unitario}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \text{sen } u du dv = 2\pi [-\cos u]_0^{\pi/2} = 2\pi.$$

Con la otra parametrización:  $\mathbf{f} \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, 1\right) \Rightarrow$

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_B \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \stackrel{\text{polares}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(1-r^2)^{-1/2} dr d\theta = 2\pi [-(1-r^2)^{1/2}]_0^1 = 2\pi.$$

Las integrales coinciden porque el **pvf** apuntaba en ambos casos en la misma dirección: hacia el exterior. Y el valor es positivo porque el campo  $\mathbf{f}$  tiene también esa dirección (y el flujo a través de  $S$  es positivo).

**Ej 2\*.** Integremos el mismo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  de arriba, pero ahora sobre el cono  $S$  del ejemplo 2.

Eran:  $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$ ,  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (-u \cos v, -u \sin v, u)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, 2]$ .

Por tanto:  $\mathbf{f}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = (u \cos v, u \sin v, u) \cdot (-u \cos v, -u \sin v, u) = -u^2 + u^2 = 0$ .

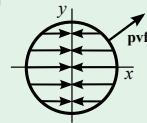
Así pues:  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = 0$ . [El campo es tangente al cono y el flujo debía ser nulo].

**Ej 3\*.** Sobre el cilindro  $S$  del ejemplo 3, integremos el campo vectorial  $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x, 0, z^3)$ .

Teníamos:  $\mathbf{r}(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$ ,  $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (R \cos u, R \sin u, 0)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ ,  $v \in [0, h]$ .

$$\text{Luego: } \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^h \int_0^{2\pi} (-R \cos u, 0, v^3) \cdot (R \cos u, R \sin u, 0) du dv = -\pi R^2 h.$$

[ $< 0$  pues  $\mathbf{f}$  siempre apunta hacia el interior del cilindro y el **pvf** hacia fuera].



**Ej 4\*.** Sobre la  $S$  del ejemplo 4, calculemos  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (2z, y, 1)$ .

Como eran  $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, x+y^2)$  y  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-1, -2y, 1)$ , la integral resulta ser:

$$\iint_D (2x+2y^2, y, 1) \cdot (-1, -2y, 1) dx dy = \int_0^1 \int_0^y (1-2x) dx dy = \int_0^1 (y-y^2) dy = \frac{1}{6}.$$

[Integrando campos vectoriales no aparecen las raíces que nos daban problemas con los campos escalares].

**Ej 5.** Hallemos  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ , con  $\mathbf{f}(x,y,z) = (x, 1, 2)$ ,  $S$  la superficie  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  y  $\mathbf{n}$  exterior.

$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (3 \text{ sen } \phi \cos \theta, 3 \text{ sen } \phi \text{ sen } \theta, 3 \cos \phi)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $\phi \in [0, \pi]$ ,  $\bar{\mathbf{r}}_\phi \times \bar{\mathbf{r}}_\theta = 3 \text{ sen } \phi \bar{\mathbf{r}}(\phi, \theta)$ .  
[sentido correcto]

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 9 \text{ sen } \phi (3 \text{ sen } \phi \cos \theta, 1, 2) \cdot (\text{sen } \phi \cos \theta, \text{sen } \phi \text{ sen } \theta, \cos \phi) d\phi d\theta \\ &= 9 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{3}{2} \text{ sen}^3 \phi (1 + \cos 2\theta) + \text{sen}^2 \phi \text{ sen } \theta + 2 \text{ sen } \phi \cos \phi \right] d\phi d\theta = 27\pi \int_0^\pi (1-c^2) s d\phi = 36\pi. \end{aligned}$$

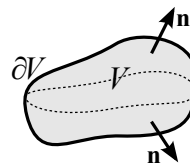
[se anula]                      [se anula]                      [se anula]

## 5.2. Teoremas de la divergencia y Stokes

### Teorema de la divergencia en el espacio (o de Gauss-Ostrogradsky)

Sea  $V$  región acotada del espacio cuya frontera  $\partial V$  es una superficie conexa,  $\mathbf{n}$  el vector normal unitario exterior a  $V$  y sea  $\mathbf{f}$  de  $C^1$  en  $V$ .

Entonces: 
$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS.$$



[La segunda integral es  $\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  si el producto vectorial fundamental apunta hacia el exterior].

Ni siquiera damos una idea de la demostración (ver el Marsden-Tromba u otros libros de cálculo en  $\mathbf{R}^n$ ).

[Como la integral de superficie mide el flujo de un fluido sobre la frontera, es aplicable también aquí lo que dijimos en el plano sobre el significado de la divergencia].

[En el plano era necesario hallar el vector normal, pero en el espacio la parametrización nos da ya el  $\mathbf{pvf}$ ].

**Ej 1.** Comprobemos el teorema para  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  y  $V$  la semiesfera de la sección anterior.

Por una parte: 
$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} \, dx \, dy \, dz = 3 \iiint_V dx \, dy \, dz = 3 \times \text{volumen de } V = 3 \times \frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 = 2\pi.$$

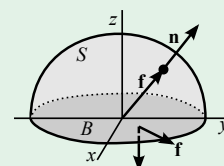
Por otra, la  $\partial V$  consta de dos partes, la  $S$  superior y el círculo  $B$  de la base: 
$$\iint_{\partial V} = \iint_S + \iint_B.$$

Para la parte  $S$  de la frontera es  $\mathbf{n} = \mathbf{f} = \mathbf{r}$  [ $\Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = 1$ ],

y para la  $B$  es  $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$  [ $\Rightarrow \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (x, y, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0$ ].

Por tanto, 
$$\iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S 1 \, dS + 0 = \text{área de } S = 2\pi.$$

[Nos llevó más tiempo hacer la  $\iint_S$  en 5.1 usando parametrizaciones].



Esto es excepcionalmente sencillo: no necesitamos parametrizar nada para comprobar el teorema.

Complicuemos algo el campo vectorial (y las integrales), manteniendo el recinto:

Ahora sea  $\mathbf{g}(x, y, z) = (xy, z, 1)$  y sea  $V$  la misma semiesfera. La integral triple:

$$\operatorname{div} \mathbf{g} = y, \quad \iiint_V y = \int_{\text{esféricas}} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3 \sin \theta \sin^2 \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = \frac{1}{4} [-\cos \theta]_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \phi \, d\phi = 0$$

[integramos función impar en volumen simétrico]

Hemos visto ya esta parametrización de  $S$  (le cambiamos el nombre a los parámetros):

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \phi \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta = \sin \phi \mathbf{r}(\phi, \theta).$$

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \phi (\sin^2 \phi \cos \theta \sin \theta, \cos \phi, 1) \cdot (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin^4 \phi \cos^2 \theta \sin \theta + \sin^2 \phi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \cos \phi) \, d\phi \, d\theta = 2\pi \left[ \frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\pi/2} = \pi. \end{aligned}$$

[pues  $\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta = 0$ ,  $\int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$ ]

$$[\text{No sale mal con } \mathbf{r} = (x, y, \sqrt{1-x^2-y^2}) \rightarrow \iint_B [y+1-x^2y(1-x^2-y^2)^{-1/2}] \, dy \, dx = \dots].$$

Sobre el círculo  $B$  de la base es  $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (xy, 0, 1) \cdot (0, 0, -1) = -1$ , con lo que:

$$\iint_B \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = -\iint_B 1 \, dS = -\text{área de } S = -\pi. \quad \text{Por tanto, } \iint_{\partial V} = \iint_S + \iint_B = \pi - \pi = 0.$$

**Ej 2.** Volvamos a comprobar el teorema, ahora para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (-x, 0, z^3)$  y  $V$  el cilindro de los ejemplos 3 y 3\* de 5.1 cuya superficie lateral estaba descrita por:

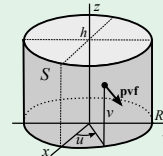
$$\mathbf{r} = (R \cos u, R \sin u, v), \quad \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = (R \cos u, R \sin u, 0), \quad u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, h].$$

Debemos sumar a la  $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = -\pi R^2 h$  calculada las integrales sobre las tapas.

$$\text{En la tapa superior: } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (-x, 0, h^3) \cdot (0, 0, 1) = h^3 \rightarrow \iint_{B_R} h^3 = \pi R^2 h^3.$$

$$\text{Y en la inferior: } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = (-x, 0, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0. \quad \text{Así pues, } \iint_{\partial V} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \pi R^2 (h^3 - h).$$

$$\text{Por otra parte: } \operatorname{div} \mathbf{f} = 3z^2 - 1, \quad \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{f} = \int_{\text{cilíndricas}} \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r(3z^2 - 1) \, dz \, dr \, d\theta = 2\pi \frac{R^2}{2} (h^3 - h).$$



**Ej 3.** El flujo calculado de  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, 1, 2)$  en el ejemplo 5 de 5.1 sería inmediato gracias al teorema:

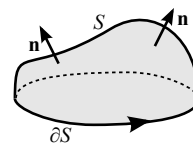
Como era  $S = \partial V$ , esfera de radio 3 y es  $\operatorname{div} \mathbf{f} = 1$ , la integral allí calculada coincide con:

$$\iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta = 36\pi = \text{volumen de } V = \frac{4}{3} \pi 3^3.$$

Si el teorema de la divergencia relacionaba una integral en un volumen con una de superficie en su borde, el de Stokes relaciona una de superficie con una de línea:

### Teorema de Stokes

Sea  $S$  una superficie en el espacio limitada por la curva  $\partial S$  y sea  $\mathbf{f} \in C^1$  en  $S$ . Entonces:  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ , con  $\mathbf{n}$  vector unitario normal a  $S$  y los sentidos de  $\mathbf{n}$  y de recorrido de  $\partial S$  indicados en el dibujo.



[Caminando por la  $\partial S$ , la superficie queda a nuestra izquierda y la normal apunta de los pies a la cabeza. Estamos suponiendo con esto que nuestra superficie es orientable para poderlo afirmar].

[Podríamos alternativamente escribir  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$  si la  $\mathbf{r}$  que utilizamos da el sentido de  $\mathbf{n}$  adecuado].

[Cuando  $S$  es una región del plano  $xy$  es  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ , con lo que  $\text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = g_x - f_y$ , y  $\mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$  se reduce a  $f \, dx + g \, dy$ : el teorema se Stokes pasa a convertirse en el de Green. Y como sucedía allí, para un campo conservativo las dos integrales son nulas, por anularse el rotacional y por ser camino cerrado].

Resumamos la demostración para una superficie de la forma  $(x, y, k(x, y))$  con  $k$  de  $C^2$  en  $D$ .

Llamando  $\mathbf{f} = (f, g, h)$ , es  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [-k_x(h_y - g_z) - k_y(f_z - h_x) + (g_x - f_y)] \, dx \, dy \, dz$ .

Sea  $\mathbf{d}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in [a, b]$ , una parametrización (en sentido adecuado) de  $\partial D$ .

Entonces  $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t), k(x(t), y(t)))$ ,  $t \in [a, b]$  será una parametrización de  $\partial S$  y se tiene:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}) \cdot (x', y', k_x x' + k_y y') \, dt = \int_a^b [(f(\mathbf{c}) + h(\mathbf{c}) k_x) x' + (g(\mathbf{c}) + h(\mathbf{c}) k_y) y'] \, dt \\ &= \int_{\partial D} (f + h k_x) \, dx + (g + h k_y) \, dy = \iint_D (g_x + g_z k_x + h_x k_x - f_y - f_z k_y - h_y k_x) \, dx \, dy \quad \uparrow \\ &\quad \text{Green} \end{aligned}$$

**Ej 1\***. Comprobamos el teorema para i)  $\mathbf{f}(x, y, z) = (x, y, z)$  y ii)  $\mathbf{g}(x, y, z) = (0, 0, y)$ , y la  $S$  habitual.

Para i) es  $\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0} \Rightarrow \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0$ . Además es  $C^1(\mathbf{R}^3)$  con lo que  $\mathbf{f}$  deriva de un potencial [y casi a ojo se ve que  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$  cumple  $\nabla U = \mathbf{f}$ ]. Por tanto,  $\oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 0$  también.

Para ii) debemos echar alguna cuenta más pues  $\text{rot } \mathbf{g} = \mathbf{i}$  [ $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = (1, 0, 0) \cdot (x, y, z) = x$ ].

Entonces:  $\iint_S \text{rot } \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S x \, dS = \int_0^{2\pi} \cos v \, dv \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \, du = 0$  [la primera integral lo es].

La integral también se puede hacer:  $\iint_B \frac{x \, dx \, dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 (1-r^2)^{-1/2} \cos \theta \, dr \, d\theta = 0$ .

Una posible parametrización de  $\partial S$  es  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ ,  $t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{c}(t)) = (0, 0, \sin t)$ .

Así pues,  $\oint_{\partial S} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (0, 0, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, 0) \, dt = \int_0^{2\pi} 0 \, dt = 0$ , como debía ser.

[La integral de línea a lo largo de la circunferencia se ha anulado, a pesar de no ser el campo conservativo. En este caso,  $\mathbf{g}$  y  $\mathbf{c}'$  eran ortogonales. Sobre otras curvas cerradas, la integral de  $\mathbf{g}$  será distinta de 0. Dijimos que para que  $\mathbf{g}$  fuese conservativo, su integral a lo largo de **todo** camino cerrado debía ser nula].

**Ej 4**. Comprobemos otra vez Stokes, ahora para el campo  $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, 1, y)$  y la superficie  $S$  descrita por  $y+z=0$  y  $x^2+y^2 \leq 4$ .

$$\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & 1 & y \end{vmatrix} = (1, 1, 0), \quad \mathbf{r}(x, y) = (x, y, -y) \text{ con } D = B_2(\mathbf{0}),$$

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (-f_x, -f_y, 1) = (0, 1, 1).$$

$$\rightarrow \iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D (-y, 1, y) \cdot (0, 1, 1) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (r - r^2 \sin \theta) \, dr \, d\theta = 4\pi.$$

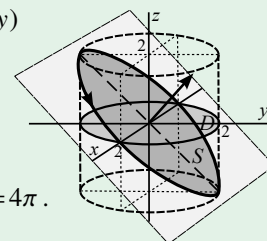
O bien, sin parametrizar: viendo el plano, es  $\mathbf{n} = (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$  su normal unitaria.

Luego  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}} \, dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \text{área de } S = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2$ . [El área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$  es  $\pi ab$ ].

La elipse  $\partial S$  (en sentido correcto) se puede parametrizar:  $\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, -2 \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ .

$$\text{Por tanto, } \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = 2 \int_0^{2\pi} (-2 \sin t, 1, 2 \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t, -\cos t) \, dt$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t + \cos t - 2 \sin t \cos t) \, dt = 4\pi. \quad \text{[Se anulan todas menos la integral de la constante].}$$



**Ej 5.** Comprobemos Stokes para la superficie  $z = 4 - 4x^2 - y^2$  con  $z \geq 0$  y  $\mathbf{f}(x, y, z) = (y, 2x, 1 + yz)$ .

La parametrización más sencilla de la elipse que limita  $S$  (en el sentido del dibujo) es:  $\mathbf{c}(t) = (\cos t, 2 \sin t, 0)$ .

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} (2 \sin t, 2 \cos t, 1) \cdot (-\sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (4 \cos^2 t - 2 \sin^2 t) dt = \int_0^{2\pi} (1 + 3 \cos 2t) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Una posible parametrización de la superficie  $S$  es

$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 4 - 4x^2 - y^2)$ ,  $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = (8x, 2y, 1)$ , con  $(x, y) \in D$ , región elíptica.

[El  $\mathbf{p}\mathbf{v}\mathbf{f}$  apunta en el sentido adecuado al recorrido de  $\partial D$  para aplicar Stokes].

Ahora calculamos la integral de superficie de  $\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & 2x & 1 + yz \end{vmatrix} = (z, 0, 1)$ .

$$\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D [8x(4 - 4x^2 - y^2) + 1] dx dy = \iint_D 1 \quad [= \text{área de } D = \pi \cdot 2 \cdot 1].$$

impar y  $D$  simétrico

Para hallar el área integrando hacemos (ejemplo de 3.1):  $x = \cos \theta$ ,  $y = 2 \sin \theta$ , con  $J = 2r \rightarrow$

$$\text{Área de } D = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r dr d\theta = 2\pi. \quad [\text{Sin usar la imparidad, saldría una } \int_0^{2\pi} \int_0^1 16r^2 c(4 - 4r^2) dr d\theta = 0].$$

$$[\text{En cartesianas (sin simplificar) aparece: } \int_{-1}^1 \int_{-2\sqrt{1-x^2}}^{2\sqrt{1-x^2}} 1 dy dx = 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2\pi].$$

También podíamos parametrizar  $S$  usando las polares anteriores típicas de las elipses:

$$\mathbf{r} = (r \cos \theta, 2r \sin \theta, 4 - 4r^2), \quad \begin{matrix} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{matrix} \rightarrow \mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c & 2s & -2r \\ -rs & 2rc & 0 \end{vmatrix} = 2r(8r \cos \theta, 4r \sin \theta, 1).$$

Con ellas queda:  $\iint_S \text{rot } \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r(4 - 4r^2, 0, 1) \cdot (8r \cos \theta, 4r \sin \theta, 1) dr d\theta = 2\pi$  como antes.

