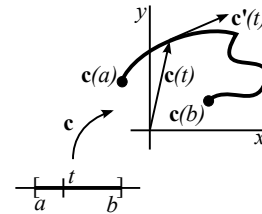


4. Integrales de línea

4.1 Integrales de campos escalares a lo largo de curvas

Una **función vectorial** (también llamada **trayectoria** o **camino**) era una $\mathbf{c} : [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$, cuya gráfica $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ es una **curva** C en \mathbf{R}^n y su derivada $\mathbf{c}'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ describe el vector tangente a la curva (el vector velocidad, si $\mathbf{c}(t)$ está describiendo un movimiento en \mathbf{R}^n).

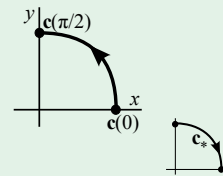


[La recta tangente a C en $\mathbf{c}(t_0)$ era: $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}(t_0) + t \mathbf{c}'(t_0)$].

\mathbf{c} se dice C^1 si es continua y \mathbf{c}' existe y es continua $\forall t \in (a, b)$. Es C^1 **a trozos** si C es continua y $[a, b]$ se puede dividir en un número finito de subintervalos en cada uno de los cuales \mathbf{c} es C^1 [su gráfica será entonces una curva continua sin recta tangente en un número finito de puntos].

Ej 1. $\mathbf{c} : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$ es una trayectoria C^1 pues $\mathbf{c}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ existe $\forall t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$\mathbf{c}_* : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ con $\mathbf{c}_*(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$, $\mathbf{c}'_*(t) = (1, -t(1-t^2)^{-1/2})$ es otro camino C^1 , que describe esa misma curva en sentido opuesto. Se dice que \mathbf{c} y \mathbf{c}_* son dos **parametrizaciones** de la misma curva C .



Sea $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ un camino C^1 y sea f un campo escalar en \mathbf{R}^n tal que $f(\mathbf{c}(t))$ es continua en $[a, b]$. La integral de f a lo largo de \mathbf{c} se define:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds \equiv \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Si $\mathbf{c}(t)$ es solamente C^1 a trozos o si $f(\mathbf{c}(t))$ es continua a trozos, definimos $\int_{\mathbf{c}} f ds$ descomponiendo $[a, b]$ en intervalos sobre los que $f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\|$ sea continua y sumando las integrales sobre cada uno de ellos.

Ej 2. Si $f(x, y) = xy^2$ y \mathbf{c} , \mathbf{c}_* son los de arriba, las integrales a lo largo de las dos trayectorias son:

$$\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t \cdot 1 dt = \frac{1}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{3}.$$

$$\int_{\mathbf{c}_*} f ds = \int_0^1 t(1-t^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{1}{3} (1-t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

No es casualidad que ambas integrales coincidan. Probaremos en 4.2 que:

Teor 1. Si \mathbf{c} y \mathbf{c}_* describen la misma curva C , entonces $\int_{\mathbf{c}} f ds = \int_{\mathbf{c}_*} f ds \equiv \int_C f ds$.

Como la **integral de línea de una f escalar no depende de la parametrización, sólo de la curva**, es lícita la notación $\int_C f ds$ (integral de f sobre C) donde \mathbf{c} no aparece por ningún lado.

Interpretemos esta integral. Sea primero $f \equiv 1$. Si pensamos que $\mathbf{c}(t)$ describe una partícula, al ser $\|\mathbf{c}'(t)\|$ la velocidad escalar en el instante t , parece claro que $ds = \|\mathbf{c}'(t)\| dt$ ('diferencial de arco') representa la distancia recorrida en un 'diferencial de tiempo dt ' y por tanto:

$$L = \int_C ds = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt \text{ representa la } \mathbf{longitud} \text{ de la curva } C \text{ definida por } \mathbf{c}.$$

Ej 3. Hallemos la longitud de la curva descrita por $\mathbf{c}(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [-1, 1]$.

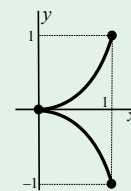
$$\|\mathbf{c}'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} \Rightarrow L = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{4+9t^2} dt = \frac{2}{27} (4+9t^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2(13^{3/2}-8)}{27} \approx 2.88.$$

O con otra parametrización de la misma curva (y usando su simetría):

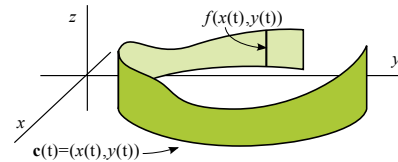
$$(x, x^{3/2}), x \in [0, 1] \Rightarrow L = 2 \int_0^1 \sqrt{1+\frac{9x}{4}} dx = \frac{16}{27} (1+\frac{9x}{4})^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{16}{27} [\frac{13^{3/2}}{8} - 1].$$

[Cuando $\mathbf{c}' = \mathbf{0}$ pueden aparecer **picos** en las curvas, pues el vector tangente no tiene dirección definida].

[Estas integrales de campos escalares, por incluir una raíz, muchas veces llevan a primitivas no calculables].



Si ahora f es cualquier campo con $f(\mathbf{c}(t)) \geq 0 \forall t \in [a, b]$, $\int_C f ds$ representa para $n=2$ el **área de la valla** de altura $f(x, y)$ en cada (x, y) de la curva C , pues un 'diferencial de valla' tiene área $f(\mathbf{c}(t)) ds = f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$.



Tiene otra posible interpretación cuando $n=2$ o $n=3$:

Si $\mathbf{c}(t)$ describe un alambre de densidad variable dada por $\rho(\mathbf{x})$, la **masa del alambre** será

$$M = \int_C \rho ds \quad (\text{tanto en el plano como en el espacio}).$$

El **centro de gravedad** (centroide si ρ constante) del alambre, tendrá por coordenadas:

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x \rho ds, \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y \rho ds; \quad \text{si } n=3, \text{ además } \bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z \rho ds.$$

Estas integrales también sirven para hallar, el **valor medio** de una f sobre C : $\bar{f} = \frac{1}{L} \int_C f ds$.

Ej 4. Sea el alambre en forma de hélice: $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^3, t \rightarrow (\cos t, \sin t, t)$ y de densidad $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Como $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{2}$, se tiene que:

Su longitud es $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\pi\sqrt{2} \approx 8.9$.

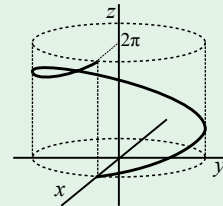
Su masa es $M = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t + t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} (2\pi + \frac{8}{3}\pi^3) \approx 125.8$.

[Su densidad media es, por tanto: $1 + \frac{4}{3}\pi^2 \approx 14.2$].

Su centro de gravedad: $\bar{x} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \cos t (1+t^2) \sqrt{2} dt = \frac{6}{3+4\pi^2} \approx 0.014$,

$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \sin t (1+t^2) \sqrt{2} dt = -\frac{6\pi}{3+4\pi^2} \approx -0.44$, $\bar{z} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} t (1+t^2) \sqrt{2} dt = 3\pi \frac{1+2\pi^2}{3+4\pi^2} \approx 4.60$.

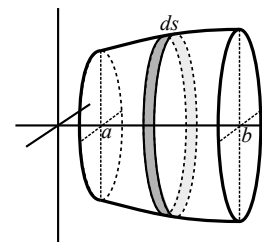
Su centroide: $\bar{x} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \cos t \sqrt{2} dt = 0$, $\bar{y} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} \sin t \sqrt{2} dt = 0$, $\bar{z} = \frac{1}{L} \int_0^{2\pi} t \sqrt{2} dt = \pi$.



Otra aplicación de este tipo de integrales. Si una curva C viene dada por $x=x(t), y=y(t) \geq 0, t \in [a, b]$, el **área de la superficie de revolución** obtenida al hacer girar C en torno al eje $y=0$ es:

$$A = 2\pi \int_a^b y ds = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

[pues el área de la banda de anchura ds es $\approx 2\pi y ds$].



En el caso particular de que C sea la gráfica de $y=y(x)$ queda: $A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} dx$.

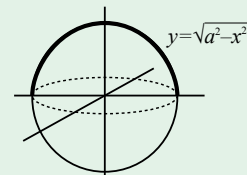
Ej 5. Hallemos el área de la superficie esférica de radio a .

Se puede ver como el giro de $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ en torno a $y=0$, y por tanto:

$$A = 2\pi \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-a}^a a dx = 4\pi a^2.$$

O escribiendo $\mathbf{c}(t) = (a \cos t, a \sin t), t \in [0, \pi]$, y con la primera fórmula:

$$ds = a dt, \quad A = 2\pi \int_0^\pi a \sin t a dt = 4\pi a^2.$$



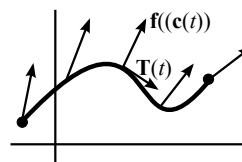
4.2. Integrales de línea de campos vectoriales

Sean $\mathbf{c}(t): [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ de C^1 y $\mathbf{f}: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ campo vectorial continuo sobre la gráfica de \mathbf{c} . La integral de línea del campo \mathbf{f} a lo largo de \mathbf{c} se define $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt$. Si $\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t)$ es sólo continua a trozos, dividimos el intervalo y sumamos las integrales.

Si $\mathbf{c}'(t) \neq \mathbf{0} \forall t$ y $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$ es el vector tangente unitario:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{T}(t)] \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} ds,$$

y se puede ver la integral de línea de \mathbf{f} como la integral del campo escalar $\mathbf{f} \cdot \mathbf{T}$, componente tangencial de \mathbf{f} en la dirección de \mathbf{c} . Por tanto:



$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ es el **trabajo** realizado por un campo de fuerzas \mathbf{f} sobre la partícula que recorre \mathbf{c} .

Se usa otra **notación** (la damos para el plano). Si $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [f(x(t), y(t)) x'(t) + g(x(t), y(t)) y'(t)] dt \equiv \int_{\mathbf{c}} f(x, y) dx + g(x, y) dy.$$

[La notación es similar para $n > 2$; ¡cuidado!, sigue siendo integral de línea].

Ej 1. Calculemos varias integrales del línea del campo $\mathbf{f}(x, y) = (x^2, 2y+x)$:

$$\mathbf{c}_1(t) = (t, t), t \in [0, 1], \quad \mathbf{c}_2(t) = (4t^2, 4t^2), t \in [0, \frac{1}{2}], \quad \mathbf{c}_3(t) = (1-t, 1-t), t \in [0, 1]$$

[describen la misma curva, la tercera en sentido contrario].

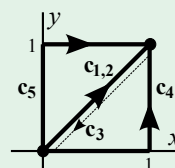
$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, 3t) \cdot (1, 1) dt = \frac{11}{6},$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (16t^4, 12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = \frac{11}{6},$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t)^2, 3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = -\frac{11}{6}.$$

$$\mathbf{c}_4(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, 1] \\ (1, t-1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t^2, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t^2, 2t-1) \cdot (0, 1) dt = \frac{7}{3}.$$

$$\mathbf{c}_5(t) = \begin{cases} (0, t), & t \in [0, 1] \\ (t-1, 1), & t \in [1, 2] \end{cases}, \quad \int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, 2t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 ((t-1)^2, 2+t) \cdot (1, 0) dt = \frac{5}{6}.$$



[La integral parece depender sólo de la curva y del sentido en que se recorre; para algunos campos no dependerá siquiera de la curva, sólo del punto inicial y del punto final].

Ej 2. Halle los integrales para los mismos \mathbf{c}_k de arriba, pero para el campo $\mathbf{g}(x, y) = (y, x-4y)$:

$$\int_{\mathbf{c}_1} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -3t) \cdot (1, 1) dt = -\int_0^1 2t dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_2} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{1/2} (4t^2, -12t^2) \cdot (8t, 8t) dt = -\int_0^{1/2} 16t^3 dt = -1,$$

$$\int_{\mathbf{c}_3} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 ((1-t), -3(1-t)) \cdot (-1, -1) dt = \int_0^1 2(1-t) dt = 1. \quad [\text{Única distinta}].$$

$$\int_{\mathbf{c}_4} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (0, t) \cdot (1, 0) dt + \int_1^2 (t-1, 5-4t) \cdot (0, 1) dt = \int_1^2 (5-4t) dt = -1.$$

$$\int_{\mathbf{c}_5} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (t, -4t) \cdot (0, 1) dt + \int_1^2 (1, t-5) \cdot (1, 0) dt = -\int_0^1 4t dt + 1 = -1.$$

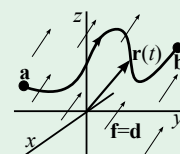
Ej 3. Si $\mathbf{c}(t) = (t, t^2, 1)$, la integral $\int_{\mathbf{c}} zx^2 dx + xy dy + y^3 dz = \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t^3 \cdot 2t + t^6 \cdot 0) dt = \frac{11}{15}$.

Ej 4. Calculemos el trabajo realizado por una fuerza constante $\mathbf{f} = \mathbf{d}$ al recorrer una partícula una trayectoria $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ que une dos puntos del espacio $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ y $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (x'(t), y'(t), z'(t)) dt \\ &= d_1(x(b)-x(a)) + d_2(y(b)-y(a)) + d_3(z(b)-z(a)) \\ &= \mathbf{d} \cdot (\mathbf{r}(b) - \mathbf{r}(a)) = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}), \text{ independiente de } \mathbf{r}. \end{aligned}$$

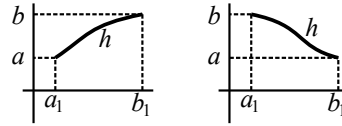
Si consideramos $\mathbf{c}(t) = \mathbf{r}(a+b-t)$, $t \in [a, b]$, que recorre la misma curva en

sentido opuesto, el trabajo es $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b (d_1, d_2, d_3) \cdot (-x'(t), -y'(t), -z'(t)) dt = -\mathbf{d} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$.



Veamos lo que sucede con la integral al hacer un cambio en el parámetro que describe la curva. Sea $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ y $h: [a_1, b_1] \rightarrow [a, b]$ una biyección C^1 . Si llamamos $\mathbf{p} = \mathbf{c} \circ h: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^n$, las trayectorias $\mathbf{p}(u)$, $u \in [a_1, b_1]$ y $\mathbf{c}(t)$, $t \in [a, b]$, describen la misma curva, en el mismo sentido o en sentido opuesto según sea, respectivamente,

$$h(a_1) = a \text{ y } h(b_1) = b \text{ o } h(a_1) = b \text{ y } h(b_1) = a$$



[se dice que la reparametrización conserva o invierte la orientación de la curva].

Teor 1. Si \mathbf{c} y \mathbf{p} describen la misma curva C , entonces según \mathbf{c} y \mathbf{p} lo hagan en el mismo sentido o en el opuesto se tiene, respectivamente:

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}, \text{ o bien } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$$

Si C es C^1 (si no, dividimos y sumamos las integrales), como $\mathbf{p}'(u) = \mathbf{c}'(h(u)) h'(u)$ es:

$$\int_{\mathbf{p}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{f}(\mathbf{c}(h(u))) \cdot \mathbf{c}'(h(u)) h'(u) du \text{ e } \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{f}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt.$$

Haciendo en la integral de la izquierda $h(u) = t$, se tiene + o - la integral de la derecha, según se conserve o no la orientación, pues no cambian o sí los límites de integración.

Si estuviésemos integrando un **campo escalar** f , se tendría siempre que:

$$\int_{\mathbf{p}} f ds = \int_{a_1}^{b_1} f(\mathbf{c}(h(u))) \|\mathbf{c}'(h(u))\| |h'(u)| du = \int_a^b f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\mathbf{c}} f ds,$$

y con esto tenemos probado el teorema de la sección anterior.

La integral de línea de un campo vectorial sólo depende de la curva C y el sentido en que se recorre (la un campo escalar sólo de C). Podemos elegir las \mathbf{c} más sencillas.

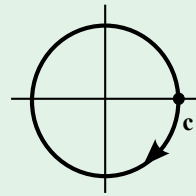
Ej 5. Tiene un sentido preciso hablar de la integral de $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$ a lo largo de la circunferencia unidad recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

[Las integrales sobre curvas cerradas suelen representarse con el símbolo \oint].

Eligiendo $\mathbf{c}(t) = (\cos t, -\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ (o $[-\pi, \pi]$, o ...),

$$\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, 0) \cdot (-\sin t, -\cos t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = \pi.$$

Con cualquier parametrización que proporcione el mismo sentido se llega a lo mismo.



Ej 6. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (z, e^y, xy)$ desde $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 2, 3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

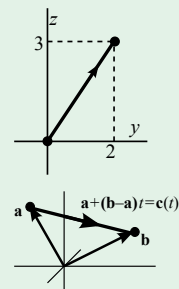
Hay muchas formas de parametrizar un segmento en el espacio. Para este, con $x=1$ constante, una \mathbf{c} casi salta a la vista: $\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t)$, $t \in [0, 1]$.

[O también, con el dibujo de la derecha: $\mathbf{c}_s(y) = (1, y, \frac{3}{2}y)$, $y \in [0, 2]$].

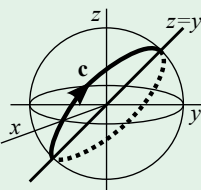
En general, vimos en 1.1 que $\mathbf{c}(t) = \mathbf{a} + (\mathbf{b} - \mathbf{a})t$, $t \in [0, 1]$ da el segmento que une \mathbf{a} y \mathbf{b} [es una recta, si $t=0$ estamos en \mathbf{a} y si $t=1$ en \mathbf{b}].

Hallemos ya la integral pedida (con la primera de las parametrizaciones dadas):

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (3t, e^{2t}, 2t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 (2e^{2t} + 6t) dt = 2e^2 + 2.$$



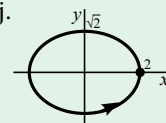
Ej 7. Hallar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{f}(x, y, z) = (y-z, z-x, x-y)$ a lo largo de la curva C intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y el plano $z=y$, si C es recorrida de modo que, vista desde las z positivas, el sentido es contrario a las agujas del reloj.



Sobre C , como $z=y$, es $x^2 + 2y^2 = 4$ (elipse).

$$\mathbf{c}(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} (0, \sqrt{2} \sin t - 2 \cos t, 2 \cos t - \sqrt{2} \sin t) \cdot (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 0 dt = 0 \quad (\text{el campo es perpendicular a la trayectoria}). \end{aligned}$$



[Se verá más adelante que serán 0 las integrales sobre un camino cerrado de los campos que sean gradientes de un campo escalar; pero, a pesar de ser $\oint_C = 0$, este campo no lo será, pues $\text{rot } \mathbf{f} = (-2, -2, -2) \neq \mathbf{0}$].

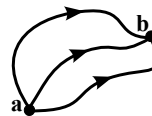
4.3. Integrales de gradientes y teorema de Green

Generalizamos el 2º teorema fundamental del cálculo infinitesimal $\int_a^b g'(x) dx = g(b) - g(a)$.

Teor 1. Sea $U: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ un campo escalar C^1 y $\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^n$ un camino C^1 a trozos.
Entonces: $\int_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$.

Si $\mathbf{c} \in C^1$ (si no, dividimos), $\int_a^b \nabla U(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt = \int_a^b (U \circ \mathbf{c})'(t) dt = U(\mathbf{c}(b)) - U(\mathbf{c}(a))$.
regla de la cadena ↑

Por tanto, **la integral de línea de un gradiente no depende del camino, sólo del punto inicial y final**. Si sabemos que un campo es un gradiente, su integral es inmediata. Además, si $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$, la curva descrita por \mathbf{c} es cerrada e $\oint_{\mathbf{c}} \nabla U \cdot d\mathbf{s} = 0$: **la integral de línea de un gradiente sobre una curva cerrada es 0**.



Si un campo vectorial \mathbf{f} es gradiente de alguna función U , a U se le llama **función potencial** para \mathbf{f} , y el campo \mathbf{f} se dice **conservativo**.

¿Cómo saber si \mathbf{f} es conservativo? Una condición necesaria sencilla para $n=2$ y $n=3$ es:

Teor 2. Si $\mathbf{f}(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow f_y \equiv g_x$.
Si $\mathbf{f}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ de C^1 es conservativo $\Rightarrow \text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$.

Si $\mathbf{f} = (f, g) = (U_x, U_y) = \nabla U$, con $U \in C^2$, por la igualdad de Schwartz de las derivadas cruzadas [$U_{xy} = U_{yx}$] debe ser $f_y \equiv g_x$. Y el mismo argumento se aplica si $n=3$.

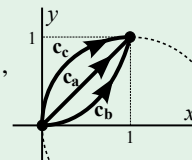
Si las derivadas cruzadas no coinciden, no puede \mathbf{f} ser gradiente. Si son iguales, muchas veces es sencillo hallar una U tal que $\nabla U = \mathbf{f}$ [aunque la implicación \Leftarrow no sea cierta en general].

Ej 1. Sea $\mathbf{f}(x, y) = (y^2, 2xy)$. Hallemos la integral entre $(0, 0)$ y $(1, 1)$ a lo largo de diferentes curvas:
a) la recta que une los puntos, b) la parábola $y=x^2$, c) la circunferencia $x^2+y^2=2x$.

Posibles parametrizaciones: a) $\mathbf{c}_a = (t, t)$, b) $\mathbf{c}_b = (t, t^2)$, c) $\mathbf{c}_c = (t, \sqrt{2t-t^2})$, con $t \in [0, 1]$ todas.

Las integrales en cada caso son:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_0^1 (t^2, 2t^2) \cdot (1, 1) dt &= \int_0^1 3t^2 dt = 1, & \text{b) } \int_0^1 (t^4, 2t^3) \cdot (1, 2t) dt &= \int_0^1 5t^4 dt = 1, \\ \text{c) } \int_0^1 (2t-t^2, 2t\sqrt{2t-t^2}) \cdot (1, \frac{1-t}{\sqrt{2t-t^2}}) dt &= \int_0^1 (4t-3t^2) dt = 1. \end{aligned}$$



Como se cumple $\frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)$, esto nos hace sospechar que \mathbf{f} es campo conservativo.

Es fácil en este caso identificar una función potencial:

Si $U_x = y^2$, debe ser $U = xy^2 + p(y)$ para alguna función $p \Rightarrow U(x, y) = xy^2$.

Si $U_y = 2xy$, debe ser $U = xy^2 + q(x)$ para alguna función q

[$U = xy^2 + C$ para cualquier constante C es también potencial, desde luego].

Por tanto, las parametrizaciones y cálculos de integrales anteriores han sido inútiles, puesto que la integral **a lo largo de cualquier trayectoria** debía valer $U(1, 1) - U(0, 0) = 1 - 0 = 1$.

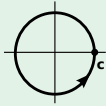
Por no depender del camino, hay otras formas de calcular una U : eligiendo caminos sencillos que unan el origen con el punto (x, y) y evaluando la integral de línea. Por ejemplo, para el C^1 a trozos:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{cases} (t, 0), & t \in [0, x] \\ (x, t), & t \in [0, y] \end{cases}, \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^x (0, 0) \cdot (1, 0) dt + \int_0^y (t^2, 2xt) \cdot (0, 1) dt = xy^2.$$

Haciendo lo mismo para un $\mathbf{f} = (f, g)$ general, obtendríamos: $\int_0^x f(t, 0) dt + \int_0^y g(x, t) dt = U(x, y)$.

Veamos qué campos de los ejemplos de la sección anterior son conservativos. El $(x^2, 2y+x)$ del 1 no lo es por ser $f_y = 0 \neq 1 = g_x$. El $(y, x-4y)$ del 2 sí lo es: $1 \equiv 1$ y $U = xy - 2y^2$ es su potencial. No lo es el del 3, (zx^2, xy, y^3) por no ser $\text{rot } \mathbf{f} \equiv \mathbf{0}$. El $\mathbf{f} = \mathbf{d}$ del 4 lo es [con $U = (d_1x, d_2y, d_3z)$]. El $(y, 0)$ del 5 no: no podía serlo pues vimos que su integral sobre un camino cerrado era no nula y también lo asegura $1 \neq 0$. Para 6 y 7 el $\text{rot } \mathbf{f}$ es, respectivamente, $(x, 1-y, 0)$ y $(-2, -2, -2)$ con lo que no pueden derivar de una función potencial U .

Ej 2. Hallemos la integral de $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$ a lo largo de $x^2+y^2=1$ en sentido antihorario.



Si $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, $\oint_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = 2\pi$.

No puede haber un potencial C^1 que contenga la curva, pese a ser $f_y = g_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Según este ejemplo, **no basta la igualdad de las derivadas cruzadas para ser conservativo**. Pero hay que pedir poco más para que sí baste. [Los dos teoremas que siguen son más difíciles de demostrar y necesitan el teorema de Stokes de 5.2].

Teor 3. Si \mathbf{f} es C^1 en todo \mathbf{R}^2 [\mathbf{R}^3] y $f_y \equiv g_x$ [$\text{rot } \mathbf{f} = \mathbf{0}$] $\Rightarrow \mathbf{f}$ es conservativo.

[El campo $\mathbf{f} \in C^1$ del ejemplo 1 sabemos ahora que es conservativo desde que vimos que $f_y \equiv g_x$. Para el 2, \mathbf{f} no era C^1 en $(0, 0)$, el teorema no dice que haya potencial, y no lo hay en todo \mathbf{R}^2].

Ej 3. Calculemos la integral de línea del campo vectorial $\mathbf{f}(x, y, z) = (4x, 3z-2y, 3y)$ desde $(1, 0, 0)$ hasta $(1, 2, 3)$ a lo largo del segmento que une los puntos.

En el ejemplo 6 de 4.2 ya parametrizamos el segmento, y podemos hallar la integral directamente:

$$\mathbf{c}(t) = (1, 2t, 3t), t \in [0, 1] \rightarrow \int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^1 (1, 5t, 6t) \cdot (0, 2, 3) dt = \int_0^1 28t dt = 14t^2 \Big|_0^1 = 14.$$

Pero para este campo es $\text{rot } \mathbf{f} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 4x & 3z-2y & 3y \end{vmatrix} = (3-3)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + (0-0)\mathbf{k} = \mathbf{0}$.

y además \mathbf{f} es C^1 en \mathbf{R}^3 . Existe, por tanto, una función potencial $U(x, y, z)$ para el campo \mathbf{f} . Los cálculos de los potenciales en \mathbf{R}^3 son similares a los de \mathbf{R}^2 :

$$U_x = 4x \rightarrow U = 2x^2 + p(y, z)$$

$$\text{Debe ser } U_y = 3z-2y \rightarrow U = 3yz - y^2 + q(x, z), \quad U = 2x^2 + 3yz - y^2 \Rightarrow$$

$$U_z = 3y \rightarrow U = 3yz + r(x, y)$$

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = U(1, 2, 3) - U(1, 0, 0) = 16 - 2 = 14.$$

Este es el valor de la integral sobre cualquier camino que una los puntos, por complicado que sea.

Por ejemplo, hallemos la integral a lo largo de $\mathbf{c}_*(t) = (e^{t-t^2}, 2t^3, 3t^2)$, $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}^*} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^1 (4e^{t-t^2}, 9t^2 - 4t^3, 6t^3) \cdot ((1-2t)e^{t-t^2}, 6t^2, 6t) dt = \int_0^1 (2(2-4t)e^{2t-2t^2} + 90t^4 - 24t^5) dt \\ &= 2e^{2t-2t^2} + 18t^5 - 4t^6 \Big|_0^1 = 14. \end{aligned}$$

El teorema 3 se puede refinar exigiendo hipótesis menos fuertes. No es preciso que \mathbf{f} sea C^1 en todo \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3 . Basta con que lo sea en lo que se llama un conjunto D **'simplemente conexo'**: toda curva cerrada contenida en el D conexo ('de una sola pieza') debe poder contraerse a un punto de forma continua dentro del conjunto (en el ejemplo 2 no se puede). En \mathbf{R}^2 significa que D no tiene 'agujeros'. En \mathbf{R}^3 , puntos sueltos de discontinuidad no molestan, pero sí, por ejemplo, no ser C^1 en toda una recta.

Ej 4. Sea $\mathbf{f}(x, y, z) = -x(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{i} - y(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{j} - z(x^2+y^2+z^2)^{-3/2} \mathbf{k}$ (un campo gravitatorio).

\mathbf{f} es C^1 en $\mathbf{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$, que es simplemente conexo en el espacio. Debe existir U .

Se ve casi a ojo: $U(x, y, z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. [En esféricas es $U = \frac{1}{\rho}$ y $\mathbf{f} = -\frac{1}{\rho^2} \mathbf{e}_\rho = f_\rho \mathbf{e}_\rho$].

La integral a lo largo de cualquier camino \mathbf{c} entre $(0, 0, 1)$ y $(1, 2, 2)$ será $\int_{\mathbf{c}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{2}{3}$.

[Por ejemplo siguiendo el segmento $(t, 2t, 1+t)$, $t \in [0, 1] \rightarrow \int_0^1 -(6t+1)(6t^2+2t+1)^{-3/2} dt = -\frac{2}{3}$].

Ej 2*. En $D = \{x > 0\}$ sí debe existir potencial U para $\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$. Lo es $U = \arctan \frac{y}{x}$.

Sobre cualquier curva cerrada contenida en D la integral sí debe ser nula. Por ejemplo, sobre la circunferencia $(2+\cos t, \sin t)$, $t \in [-\pi, \pi]$. [Si se hace la integral, se comprueba que vale 0].

Acabemos nuestro estudio de los sistemas conservativos admitiendo este resultado general:

Teor 4. Sea \mathbf{f} continuo en $D \subset \mathbf{R}^n$ abierto. Entonces son equivalentes las afirmaciones:

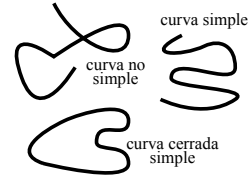
- \mathbf{f} es gradiente de una función potencial U en D .
- La integral de línea de \mathbf{f} es independiente del camino en D .
- La integral de \mathbf{f} a lo largo de todo camino cerrado contenido en D es nula.

Teoremas de Green y de la divergencia

Son teoremas que relacionan integrales dobles e integrales de línea sobre curvas cerradas en el plano. Veremos otros sobre integrales de campos vectoriales en el espacio (estos se pueden considerar casos particulares de aquellos), tratando las integrales de superficie.

Una **curva simple** es la imagen de un camino C^1 a trozos **inyectivo**.

Una **curva cerrada simple** en \mathbf{R}^2 será la imagen de un $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^2$, inyectivo en $[a, b]$ y tal que $\mathbf{c}(a) = \mathbf{c}(b)$. Una curva de estas puede recorrerse en dos sentidos diferentes; para indicar que una integral se recorre en sentido antihorario escribiremos \oint .



Teorema de Green:

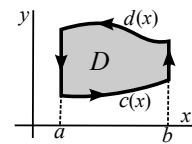
Sea $D \subset \mathbf{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple y el campo $\mathbf{f} = (f, g) \in C^1(D)$. Entonces:

$$\iint_D [g_x - f_y] dx dy = \oint_{\partial D} f dx + g dy \equiv \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}.$$

[Obsérvese que si \mathbf{f} es conservativo, el teorema de Green dice $0 = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s}$ como debía ser].

El caso de que D fuese del primer tipo de recintos que consideramos en las integrales dobles: $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$ se tendría:

$$-\iint_D f_y dx dy = -\int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f_y(x, y) dy dx = \int_a^b [f(x, c(x)) - f(x, d(x))] dx.$$



Parametrizando los cuatro tramos de la frontera:

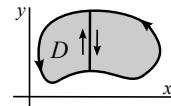
$$(x, c(x)), x \in [a, b]; (b, y), y \in [c(b), d(b)]; (x, d(x)), x \in [a, b]; (a, y); y \in [c(a), d(a)] \rightarrow$$

$$\oint_{\partial D} f dx = \int_a^b f(x, c(x)) \cdot 1 dx + \int_{c(b)}^{d(b)} f(b, y) \cdot 0 dy - \int_a^b f(x, d(x)) \cdot 1 dx - \int_{c(a)}^{d(a)} f(a, y) \cdot 0 dy = -\iint_D f_y.$$

Análogamente, para recintos $D = \{(x, y) : c \leq y \leq b, a(y) \leq x \leq b(y)\}$ se ve que $\oint_{\partial D} g dy = \iint_D g_x$.

Se cumplirá, pues $\oint_{\partial D} f dx + g dy = \iint_D [g_x - f_y]$ en un recinto D que sea de los dos tipos anteriores.

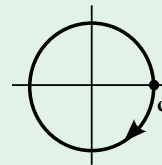
Dividiendo cualquier recinto general D en otros de estos últimos y teniendo en cuenta que se cancelan las integrales de línea sobre segmentos comunes, por ser recorridos en sentido opuesto, se llega al resultado.



Ej 5. Encontramos, usando Green, el valor π de la integral de $\mathbf{f}(x, y) = (y, 0)$ sobre la circunferencia unidad calculado ya en el ejemplo 5 de 4.2.

Como el sentido de recorrido es opuesto al que pide Green y $g_x - f_y = -1$ es:

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = -\iint_D (-1) dx dy = \iint_D dx dy = \text{área de } D = \pi \cdot 1^2 = \pi.$$



Ej 6. Comprobemos el teorema para $\mathbf{f}(x, y) = (y, 2x)$ y D región limitada por $y = -x^2$ e $y = -1$.

Casi siempre es más corto el cálculo de la integral doble:

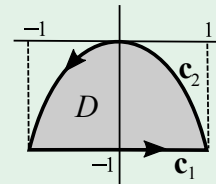
$$\iint_D [g_x - f_y] dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{-x^2} dy dx = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

La ∂D está formada por dos curvas distintas fácilmente parametrizables:

$$\mathbf{c}_1(x) = (x, -1), x \in [-1, 1], \quad \mathbf{c}_2(x) = (x, -x^2), x \in [1, -1].$$

escribir esto equivale a cambiar el signo a la integral \uparrow

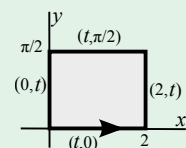
$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-1}^1 (-x^2, 2x) \cdot (1, -2x) dx + \int_{-1}^1 (-1, 2x) \cdot (1, 0) dx = \int_{-1}^1 5x^2 dx - \int_{-1}^1 1 dx = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3}.$$



Ej 7. Halleemos $\oint_{\partial D} e^x \sin y dx + e^{2x} \cos y dy$, con D rectángulo $[0, 2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^2 (0 \cdot 1 + 0) dt + \int_0^{\pi/2} (0 + e^4 \cos t \cdot 1) dt - \int_0^2 (e^t \cdot 1 + 0) dt - \int_0^{\pi/2} (0 + \cos t \cdot 1) dt$$

$$\text{Con Green: } \int_0^{\pi/2} \int_0^2 (2e^{2x} \cos y - e^x \cos y) dx dy = [\sin y]_0^{\pi/2} [e^{2x} - e^x]_0^2 = e^4 - e^2.$$



Normalmente utilizaremos Green para reducir integrales de línea a integrales dobles, que suelen ser más sencillas. Pero en el siguiente ejemplo procedemos al contrario.

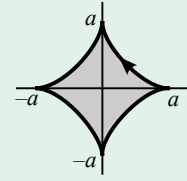
Ej 8. Calculemos el área encerrada por la 'hipocicloide' $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

Green dice que: $A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} x dy - y dx$, pues $g_x - f_y = 2$.

$\mathbf{c}(\theta) = (a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$ es la mejor parametrización.

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos^3 \theta)(3a \sin^2 \theta \cos \theta) - (a \sin^3 \theta)(-3a \cos^2 \theta \sin \theta)] d\theta$$

$$= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} [1 - \cos 4\theta] d\theta = \frac{3}{8} \pi a^2.$$



[los picos de la curva aparecen para $\mathbf{c}'=0$].

Del teorema de Green se obtiene fácilmente:

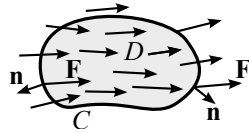
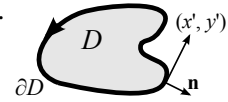
Teorema de la divergencia en el plano:

Sean $D \subset \mathbb{R}^2$ limitado por ∂D curva cerrada simple, $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ campo vectorial C^1 , y \mathbf{n} el vector normal unitario exterior a ∂D . Entonces $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{f} dx dy = \oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds$.

Si ∂D viene dada por $\mathbf{c}(t) = (x(t), y(t))$, la normal es $\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$.

Si $\mathbf{f} = (f, g)$, $\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = \int_a^b [f(x(t), y(t)) y'(t) - g(x(t), y(t)) x'(t)] dt$

$$= \oint_{\partial D} f dy - g dx \stackrel{\text{Green}}{=} \iint_D (f_x + g_y) dx dy.$$



[Imaginemos una curva cerrada C sobre la superficie de un fluido y sea $\mathbf{F} = f \mathbf{v}$, donde f es la densidad del fluido y \mathbf{v} su velocidad. Entonces

$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ mide el ritmo con el que el fluido entra o sale de D .

Si la cantidad de fluido en D disminuye (aumenta) será $\oint_C < 0$ ($\oint_C > 0$). La integral coincide con $\iint_D \operatorname{div} \mathbf{F}$. Por tanto, la $\operatorname{div} \mathbf{F}$ describe la tendencia del fluido a acumularse o dispersarse].

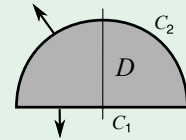
Ej 9. Comprobemos este teorema para $\mathbf{f}(x, y) = (7, y^2 - 1)$ en el semicírculo $r \leq 3$, $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = 2y, \quad \iint_D 2y dx dy = \int_0^\pi \int_0^3 2r^2 \sin \theta dr d\theta = 36.$$

Para C_1 , si $\mathbf{c}(x) = (x, 0)$, $x \in [-3, 3]$, $\mathbf{n} = (0, -1)$, $\int_{C_1} (1 - y^2) ds = \int_{-3}^3 dx = 6$.

Para C_2 , si $\mathbf{c}(t) = (3 \cos t, 3 \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, $\|\mathbf{c}'(t)\| = 3$.

Como $\mathbf{n} = (\cos t, \sin t)$, $\int_{C_2} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = 3 \int_0^\pi (7 \cos t + 9 \sin^3 t - \sin t) dt = 30$. $36 = 6 + 30$.



Ej 10. Comprobemos los teoremas de Green y de la divergencia para el campo $\mathbf{f}(x, y) = (x^3, x^2 y)$ y el recinto D del primer cuadrante acotada por $y = 2x$ e $y = x^2$.

Green: $\iint_D [g_x - f_y] = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 2xy dy dx = \int_0^2 (4x^3 - x^5) dx = [x^4 - \frac{x^6}{6}]_0^2 = \frac{16}{3}$.

Posibles parametrizaciones de los dos tramos de ∂D :

$\mathbf{c}_1(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 2]$, $\mathbf{c}'_1 = (1, 2x)$, $\mathbf{f}(\mathbf{c}_1) = (x^3, x^4)$

$\mathbf{c}_2(x) = (x, 2x)$, $x \in [2, 0]$, $\mathbf{c}'_2 = (1, 2)$, $\mathbf{f}(\mathbf{c}_2) = (x^3, 2x^3)$

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot ds = \int_0^2 (x^3 + 2x^5) dx - \int_0^2 (x^3 + 4x^3) dx = \frac{26}{3} - 2^4 = \frac{16}{3}.$$

Divergencia: $\operatorname{div} \mathbf{f} = 4x^2$. $\mathbf{n}_1 = \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}}$, $\mathbf{n}_2 = \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}}$. $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} 4x^2 dy dx = \int_0^2 (8x^3 - 4x^2) dx = \frac{32}{5}$.

$$\oint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} ds = \int_0^2 (x^3, x^4) \cdot \frac{(2x, -1)}{\sqrt{1+4x^2}} \sqrt{1+4x^2} dx - \int_0^2 (x^3, 2x^3) \cdot \frac{(-2, 1)}{\sqrt{5}} \sqrt{5} dx = \int_0^2 x^4 dx = \frac{32}{5}.$$

