

3. Integrales múltiples

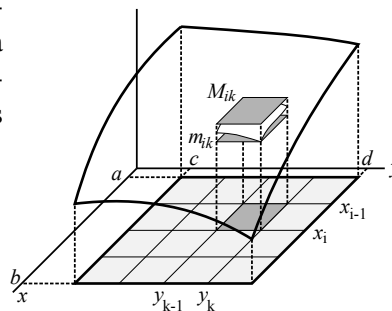
3.1 Integrales dobles

[Las demostraciones son similares a las de \mathbf{R} y hacemos pocas].

Generalizamos la definición de la integral en una variable. Sea $f(x, y)$ **acotada** en un **rectángulo** $R = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbf{R}^2$. Dividimos R en $n \times n$ subrectángulos iguales $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, del mismo área $\Delta x \Delta y = \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n}$. Llamamos M_{ik} y m_{ik} , respectivamente, al supremo e ínfimo de f en cada R_{ij} y formamos las **sumas superior** U_n e **inferior** L_n :

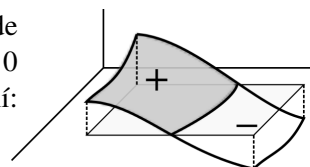
$$U_n = \sum_{i,j=1}^n M_{ij} \Delta x \Delta y, \quad L_n = \sum_{i,j=1}^n m_{ij} \Delta x \Delta y$$

(sumas de volúmenes de prismas, una superior y otra inferior al volumen que encierra $f(x, y)$ si $f \geq 0$).



Si ambas sucesiones $\{L_n\}$ y $\{U_n\}$ tienden hacia un mismo límite, decimos que f es **integrable** en R , representamos el límite común por $\iint_R f$ ó $\iint_R f(x, y) dx dy$ y le llamamos **integral** de f en R .

$\iint_R f$ representará (similar a lo que sucedía en \mathbf{R}) la suma de los volúmenes encerrados entre la gráfica de f y el plano $z=0$ en R , con signos $+$ o $-$ adecuados. Y al igual que sucedía allí:



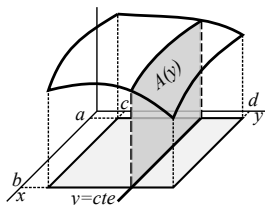
Teor 1. f continua en $R \Rightarrow f$ integrable en R .

También aquí las funciones ‘poco’ discontinuas siguen siendo integrables:

Teor 2. Si el conjunto de puntos de R en que una f acotada es discontinua es como máximo en un número finito de puntos y un número finito de gráficas de funciones continuas, entonces f es integrable en R .

Para calcular integrales dobles no necesitaremos la definición, el problema se reduce a calcular dos integraciones sucesivas de funciones de una variable:

Teorema de Fubini: f continua en $R \Rightarrow \iint_R f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$.



Para cada y constante $A(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ representa el área de la sección del sólido determinado por la gráfica de f ; integrando esta $A(y)$ entre c y d obtenemos el volumen dado por $\iint_R f = \int_c^d A(y) dy$. La segunda igualdad es lo simétrico.

[Hay funciones raras (discontinuas, claro) para las que el teorema falla].

Ej 1. Sean $R = [0, \pi] \times [0, 1]$ y $f(x, y) = 2x - y \sin x$. Calcular la integral es fácil:

$$\iint_R f = \int_0^\pi \left[\int_0^1 (2x - y \sin x) dy \right] dx = \int_0^\pi \left[2xy - \frac{y^2 \sin x}{2} \right]_0^1 dx = \int_0^\pi \left(2x - \frac{\sin x}{2} \right) dx = \left[x^2 + \frac{\cos x}{2} \right]_0^\pi = \pi^2 - 1.$$

O también podríamos hacer (los corchetes entre las integrales no se suelen escribir):

$$\iint_R f = \int_0^1 \int_0^\pi (2x - y \sin x) dx dy = \int_0^1 \left[x^2 + y \cos x \right]_0^\pi dy = \int_0^1 (\pi^2 - 2y) dy = \left[\pi^2 y - y^2 \right]_0^1 = \pi^2 - 1.$$

[No olvidemos que la integral de una constante es la constante por la longitud del intervalo].

Ej 2. $\int_c^d \int_a^b f(x)g(y) dx dy = \int_c^d g(y) \left[\int_a^b f(x) dx \right] dy = \left[\int_a^b f(x) dx \right] \left[\int_c^d g(y) dy \right]$. [Estos atajos se hacen a menudo].

Generalicemos el recinto de integración. Sea ahora D **región acotada del plano**. Sobre un

rectángulo $R \supset D$ definimos la función $f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } (x, y) \in D \\ 0 & \text{si } (x, y) \notin D \end{cases}$.

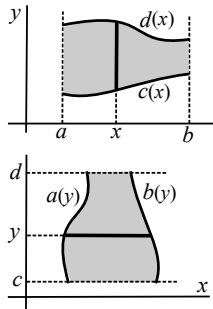
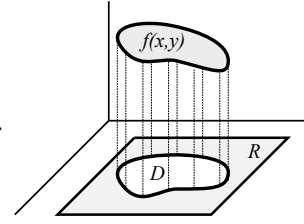
Se define $\iint_D f = \iint_R f^*$ si f^* es integrable.

Describe (si $f \geq 0$) el **volumen** limitado por la gráfica de f en D .

[Y en el caso particular en que $f=1$, es el **área** de D].

Si la frontera de D se puede poner como unión finita de gráficas de funciones continuas y f es continua ya sabemos que $\iint_D f$ existirá.

Consideremos **dos tipos sencillos** de regiones D de integración (recintos más complicados se podrán descomponer en otros de esa forma). A la vista del significado de $\iint_R f^*$ está claro que:



Teor 3.

i) Si f continua en $D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\}$,

con $c(x) \leq d(x)$ continuas en $[a, b] \Rightarrow \iint_D f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy dx$.

ii) Si f continua en $D = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$,

con $a(y) \leq b(y)$ continuas en $[c, d] \Rightarrow \iint_D f = \int_c^d \int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx dy$.

[Cuando x varía entre a y b , la y varía entre $c(x)$ y $d(x)$, e igual la otra].

Ej 3. Integremos $f(x, y) = x \cos(x+y)$ sobre el D del dibujo:

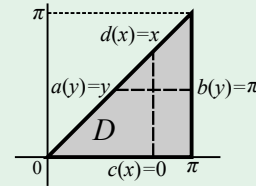
$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_0^\pi \int_0^x x \cos(x+y) dy dx = \int_0^\pi x [\sin 2x - \sin x] dx \\ &= \left[x(\cos x - \frac{1}{2} \cos 2x) \right]_0^\pi + \int_0^\pi \left[\frac{1}{2} \cos 2x - \cos x \right] dx = -\frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

O, con cálculos más largos, integrando primero respecto a x :

$$\iint_D f = \int_0^\pi \int_y^\pi x \cos(x+y) dx dy \stackrel{\text{partes}}{=} \int_0^\pi [-\pi \sin y - \cos y - y \sin 2y - \cos 2y] dy = -\frac{3\pi}{2}.$$

A veces, no sólo es preferible integrar primero respecto de una de las variables y luego respecto de la otra, sino que no tenemos otra opción. Por ejemplo, si fuese $f(x, y) = \sin x^2$, no se podría hallar $\int_0^\pi \int_y^\pi \sin x^2 dx dy$, por ser la primitiva no calculable, pero sí se puede hacer:

$$\int_0^\pi \left[\int_0^x \sin x^2 dy \right] dx = \int_0^\pi x \sin x^2 dx = -\frac{1}{2} \cos x^2 \Big|_0^\pi = \frac{1}{2} [1 - \cos \pi^2].$$



En recintos más complicados habrá que dividir. La integral sobre el recinto total D será la suma de las integrales sobre cada uno de los subconjuntos:

Ej 4. $\iint_D f = \int_{-1}^0 \int_{-2x-1}^{x^2} f(x, y) dy dx + \int_0^1 \int_{2x-1}^{x^2} f(x, y) dy dx$ (de nuevo no ponemos []).

O bien, como $y=x^2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{y}$, $y=\pm 2x-1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2}(y+1)$, se puede hacer (calculando más integrales) también de esta forma:

$$\iint_D f = \int_0^1 \int_{-(y+1)/2}^{-\sqrt{y}} f(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{(y+1)/2} f(x, y) dx dy + \int_{-1}^0 \int_{-(y+1)/2}^0 f(x, y) dx dy.$$

Si en particular integramos $f \equiv 1$ obtendremos el **área** de D :

$$A = \iint_D 1 = \int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) dx + \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

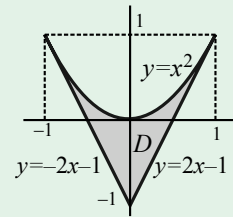
[Integrales iguales por ser $f \equiv 1$ par en x y D simétrico respecto a $x=0$; basta hacer $2 \int_0^1$].

O bien: $A = \iint_D 1 = 2 \int_0^1 \left[\frac{y}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{y} \right] dy + \int_{-1}^0 [y+1] dy = 2 \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ [$\frac{1}{2}$ = área triángulo].

Tomemos ahora $f(x, y) = 2xy$ y hallemos la integral por el primer camino:

$$\begin{aligned} \iint_D f &= \int_{-1}^0 [xy^2]_{-2x-1}^{x^2} dx + \int_0^1 [xy^2]_{2x-1}^{x^2} dx = \int_{-1}^0 [x^5 - 4x^3 - 4x^2 - x] dx + \int_0^1 [x^5 - 4x^3 + 4x^2 - x] dx \\ &= \left[-\frac{1}{5} + 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \right] + \left[\frac{1}{5} - 1 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{1}{30} + \frac{1}{30} = 0. \end{aligned}$$

[Debía anularse por ser f impar en x y D simétrico respecto a $x=0$. El 'volumen negativo' definido por la gráfica de f en la parte de D con $x \leq 0$ se cancela con el positivo de la parte con $x \geq 0$].



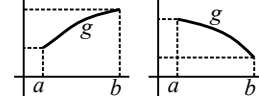
Cambios de variable

Generalicemos para integrales dobles la fórmula para integrales en \mathbf{R} :

$$\int_a^b f(g(u)) g'(u) du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx, \text{ con } g \in C^1([a, b]),$$

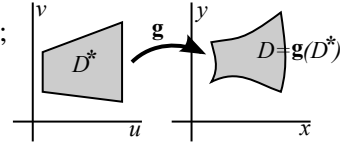
en concreto, el caso de g **inyectiva** (creciente o decreciente) en $[a, b]$:

$$\int_{[a,b]} f(g(u)) |g'(u)| du = \int_{g([a,b])} f(x) dx.$$



En \mathbf{R}^2 nuestra situación será esta: para hallar $\iint_D f(x, y) dx dy$;

realizaremos un cambio de variable $\mathbf{g} : D^* \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow D \subset \mathbf{R}^2$
 $(u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$



con el fin de que el nuevo recinto de integración D^* o la nueva función a integrar sean más sencillas.

Teor 3. Sea $\mathbf{g} : (u, v) \rightarrow (x(u, v), y(u, v))$ de C^1 , inyectiva en D^* , $\mathbf{g}(D^*) = D$ y f integrable.
 Entonces: $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$.

La demostración es complicada y no se da. Pero hacemos observaciones sobre hipótesis y resultado.

- El teorema sigue siendo cierto aunque \mathbf{g} deje de ser inyectiva en puntos sueltos o curvas continuas.
- Si el determinante jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$ en un punto, el teorema de la función inversa nos asegura que \mathbf{g} es inyectiva en un entorno de ese punto, pero sabemos que aunque no se anule en ningún punto de D^* esto no basta para que sea inyectiva en todo D^* .
- En el caso de que $f \equiv 1$ queda $\iint_D dx dy = \iint_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \text{área de } D$, con lo que el jacobiano viene a ser una medida de cómo un cambio de variable distorsiona el área.

Si D^* es un **pequeño rectángulo** del plano uv , al ser \mathbf{g} diferenciable una buena aproximación es

$$\mathbf{g}(u_o + \Delta u, v_o + \Delta v) \approx \mathbf{g}(u_o, v_o) + \mathbf{Dg}(u_o, v_o)(\Delta u, \Delta v),$$

y, por tanto, $D = \mathbf{g}(D^*)$ será 'aproximadamente igual' al paralelogramo $\mathbf{Dg}(D^*)$ de vértice $\mathbf{g}(u_o, v_o)$ y de lados

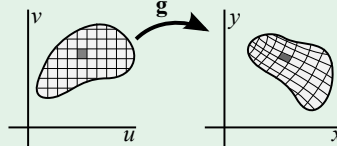
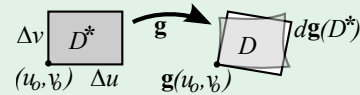
$$\mathbf{Dg}(\Delta u, 0) = \Delta u \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ y } \mathbf{Dg}(0, \Delta v) = \Delta v \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix},$$

cuyo área es el valor absoluto de $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v$

[pues $|(a_1, a_2, 0) \times (b_1, b_2, 0)| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$ mide áreas].

Si D^* es un **conjunto más general**, el área de $D = \mathbf{g}(D^*)$

será aproximadamente $\sum \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta u \Delta v$, expresión que en el límite será la integral sobre D^* .



Como primer ejemplo de cambio de variable consideramos los **cambios lineales**:

$\begin{cases} x = Au + Bv \\ y = Cu + Dv \end{cases}$. Si $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = AD - BC \neq 0$ define biyección de \mathbf{R}^2 en \mathbf{R}^2 .

$$\rightarrow \iint_D f(x, y) dx dy = |AD - BC| \iint_{D^*} f(Au + Bv, Cu + Dv) du dv.$$

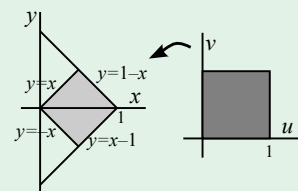
[Las regiones se transforman de forma sencilla por llevar las aplicaciones lineales rectas a rectas].

Ej 5. Sea D el cuadrado de la figura y hallemos $\iint_D (x-y)^2 e^{x+y} dx dy$.

La forma de f y el recinto sugieren: $\begin{cases} x+y = u \\ x-y = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ y = (u-v)/2 \end{cases}$.

Las rectas que definen los lados pasan a ser: $u=0, 1, v=0, 1$.

El jacobiano $\begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = -1/2$. Así pues, $\iint_D = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 v^2 e^u du dv = \frac{e-1}{6}$.

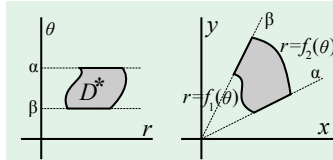
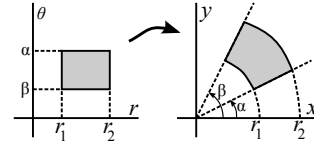


Más a menudo aparece y más útil es el **cambio a polares**:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}. \text{ El jacobiano es ahora: } \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

Y la fórmula adopta la forma:
$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_{D^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta.$$

¿Qué D provienen de conjuntos D^* sencillos del plano $r\theta$?
 Un rectángulo $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ pasa a ser un sector de corona circular limitado por las circunferencias de radio r_1 y r_2 y las rectas que pasan por el origen de pendientes θ_1 y θ_2 .



Si queremos hallar el área en polares de una región D limitada en $\theta \in [\alpha, \beta]$ por $r = f_1(\theta)$ y $r = f_2(\theta)$ será:

$$\text{área} = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f_2^2(\theta) - f_1^2(\theta)] d\theta,$$

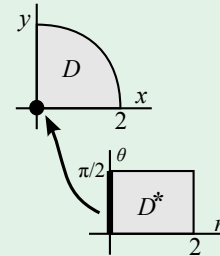
coincidente con lo visto en los apuntes de matemáticas.

En el primer ejemplo, tanto el recinto como el $x^2 + y^2$ del integrando piden a gritos las polares:

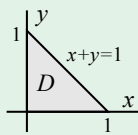
Ej 6. Hallemos $\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2} dx dy$, con D el sector circular del dibujo:

$$\iint_{D^*} r \sqrt{4-r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^2 r(4-r^2)^{1/2} dr \right] d\theta = \frac{\pi}{2} \left[\frac{(4-r^2)^{3/2}}{-3} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}$$

el $[-]$ no depende de θ ↑ octante de esfera ↗



Obsérvese que el cambio a polares no es inyectivo en lado izquierdo del rectángulo D^* (todos los puntos con $r=0$ van al origen), pero como ya dijimos, no importa que falle la inyectividad en puntos o rectas sueltas.



En otros D el cambio a polares complicará normalmente el recinto. Por ejemplo, el triángulo del dibujo daría lugar a la integral:

$$\iint_D f = \int_0^{\pi/2} \int_0^{1/(\sin \theta + \cos \theta)} r f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr d\theta$$

y no haríamos el cambio salvo que f se simplificase notablemente.

Aquí es el recinto el que pide usar polares:

Ej 7. Hallar la integral doble $\iint_D (x-y)^2 dx dy$, siendo D el semicírculo dado por $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$.

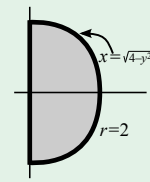
En polares es $(r \cos \theta - r \sin \theta)^2 = r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta) = r^2 (1 - \sin 2\theta)$. Por tanto:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^2 r^3 (1 - \sin 2\theta) dr d\theta = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin 2\theta) d\theta = 4\pi.$$

↑ por el jacobiano (es impar)

Debía ser mayor que 0 por ser el integrando positivo. En cartesianas sería mucho peor:

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 - 2xy + y^2) dx dy = \int_{-2}^2 \left(y^3 - 4y + \frac{2}{3}(y^2+2)\sqrt{4-y^2} \right) dy = \dots$$



En el siguiente ejemplo, aunque el recinto no parecería adecuado a las polares, por no estar limitado por curvas $r = cte$ o $\theta = cte$, el aspecto del integrando las pide indudablemente:

Ej 8. Integremos $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, sobre el semicírculo $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$, $y \geq 1$.

Las curvas que limitan el recinto, escritas en polares quedan:

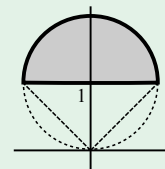
$$y = r \sin \theta = 1 \rightarrow r = 1/\sin \theta, \quad x^2 + y^2 = 2y, \quad r^2 = 2r \sin \theta \rightarrow r = 2 \sin \theta.$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{1/\sin \theta}^{2 \sin \theta} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2} dr d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (2 \sin^2 \theta - 1) d\theta = - \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\theta d\theta = 1.$$

Las cuentas se complican bastante si se intentan hacer de cualquier forma en cartesianas:

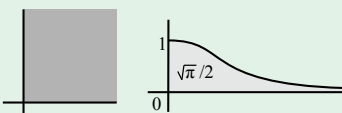
$$\int_{-1}^1 \int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dy dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\ln 2 + \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \ln(1+x^2)] dx = \dots$$

O peor: $\int_1^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} \frac{y}{x^2+y^2} dx dy = [\text{par en } x] = 2 \int_1^2 \left[\arctan \frac{x}{y} \right]_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy = \int_1^2 \arctan \frac{\sqrt{2-y}}{\sqrt{y}} dy = \dots$



Usemos el cambio a polares para hallar un integral impropia de una variable con primitiva no elemental:

Ej 9. Para calcular $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$ consideramos la integral doble:

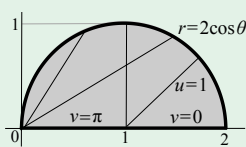
$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^\infty e^{-y^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx dy = \int_0^\infty I e^{-y^2} dy = I^2.$$


En polares es: $\int_0^{\pi/2} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\theta = \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^\infty = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.
↑ integrando par

Pequeñas modificaciones del cambio a polares son útiles en los dos siguientes ejemplos:

Ej 10. Hallemos $\iint_D y dx dy$, D región dada por $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$, $y \geq 0$.

Las coordenadas adecuadas son las polares centradas en $(1, 0)$:

$$x = 1 + u \cos v, y = u \sin v, \text{ cuyo jacobiano es } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u.$$


Como $(x-1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow u = 1$
 $y \geq 0$ si $v \in [0, \pi]$ es: $\iint_D y = \int_0^\pi \int_0^1 u^2 \sin v du dv = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 \int_0^\pi [-\cos v]_0^\pi = \frac{2}{3}$.

Aunque la integral no es complicada en cartesianas (de las dos formas) y en las polares habituales:

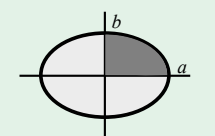
$$\iint_D y = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} y dy dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (2x-x^2) dx = \frac{1}{2} \left[4 - \frac{8}{3} \right] = \frac{2}{3}.$$

$$\iint_D y = \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} y dx dy = \int_0^1 2y(1-y^2)^{1/2} dy = -\frac{2}{3} \left[(1-y^2)^{3/2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$\iint_D y = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3} \left[-\cos^4 \theta \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{3}.$$

$x^2 + y^2 = 2x, r^2 = 2r \cos \theta, r = 2 \cos \theta$

Ej 11. Calculemos el área A de una elipse de semiejes a y b : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.



El cambio a polares no es útil, pero sí este modificado: $\begin{cases} x = ar \cos \theta \\ y = br \sin \theta \end{cases}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr.$$

La elipse pasa a ser $r = 1 \rightarrow A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 abr dr d\theta = \pi ab$.

[Con integrales en \mathbf{R} : $A = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2ab \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi ab$].
 $x = a \sin t, dx = a \cos t dt$

Además del **área** de D , $A = \iint_D dx dy$, y del **volumen** en D bajo $f(x, y) \geq 0$, $V = \iint_D f dx dy$, las integrales dobles tienen otra serie de aplicaciones (las fórmulas son análogas para \mathbf{R}^3).

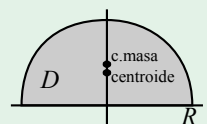
Por ejemplo el **promedio** de una magnitud f en D es $\bar{f} = \frac{1}{A} \iint_D f$.

La **masa** de una placa D es $M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$, si $\rho(x, y)$ es su densidad.

El **centro de masa** de D es el punto (\bar{x}, \bar{y}) con $\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_D x \rho$, $\bar{y} = \frac{1}{M} \iint_D y \rho$ (**centroide** si $\rho = \text{cte}$).

Los **momentos de inercia** respecto a los ejes x e y son: $I_x = \iint_D y^2 \rho$, $I_y = \iint_D x^2 \rho$.

Ej 12. Sea un semicírculo D de radio R de densidad directamente proporcional a la distancia al centro de D . Hallemos su centroide, su centro de gravedad y sus momentos de inercia.



Se puede probar que si una lámina tiene un eje de simetría, su centroide está en dicho eje (y si tiene dos, está en su intersección). Por tanto, $\bar{x}_c = 0$. La otra

$$\bar{y}_c = \frac{1}{A} \iint_D y dx dy = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4R}{3\pi} \approx 0.42 R.$$

Para el centro de gravedad hay que incluir la densidad $\rho(r) = kr$ (simétrica). También $\bar{x} = 0$.

Como la masa es $M = \int_0^\pi \int_0^R kr^2 dr d\theta = \frac{\pi R^3 k}{3}$, será $\bar{y} = \frac{3}{\pi R^3} \int_0^\pi \int_0^R r^3 \sin \theta dr d\theta = \frac{3R}{2\pi} \approx 0.48 R$.

Los momentos: $I_x = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^2 \theta dr d\theta = \frac{k\pi R^5}{10}$, $I_y = k \int_0^\pi \int_0^R r^4 \cos^2 \theta dr d\theta = \frac{k\pi R^5}{10}$.

3.2. Integrales triples

Análogamente al caso $n=2$ se puede definir $\iiint_B f$ para $f(x, y, z)$ acotada en un paralelepípedo $B = [a, b] \times [c, d] \times [p, q]$, que representará un 'volumen' en un espacio de cuatro dimensiones, es decir, el 'volumen' de un 'sólido' de cuatro dimensiones con 'base' B y altura en cada punto la que le asigna $f(x, y, z)$. Esta integral se podrá de nuevo calcular mediante integrales iteradas:

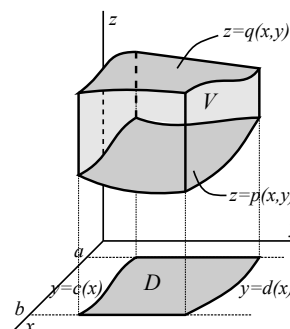
$$f \text{ continua en } B \Rightarrow \iiint_B f = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy dz \quad [\text{o las otras 5 iteradas intercambiando los papeles de } x, y, z].$$

Ej 1. Si $f(x, y, z) = 2yz - x$ y $B = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$ es:

$$\iiint_B f = \int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 (2yz - x) dz dy dx = \int_0^1 \int_0^2 (9y - 3x) dy dx = \int_0^1 (18 - 6x) dx = 15.$$

También podemos integrar sobre recintos $V \subset \mathbf{R}^3$ más generales.

$$\begin{aligned} \text{Si } V = \{ (x, y, z) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), p(x, y) \leq z \leq q(x, y) \}, \\ \text{con } c \leq d \text{ continuas en } [a, b] \text{ y } p \leq q \text{ continuas en} \\ D = \{ (x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x) \}, \text{ y } f \text{ es} \\ \text{continua en } V \Rightarrow \iiint_V f = \int_a^b \int_{c(x)}^{d(x)} \int_{p(x,y)}^{q(x,y)} f(x, y, z) dz dy dx. \end{aligned}$$



Análogas fórmulas se obtienen variando los papeles de x, y, z , y muchos recintos que aparecen están incluidos en algunos de esos tipos.

En el caso de que sea $f \equiv 1$, $\iiint_V dx dy dz$ representará el **volumen de V**.

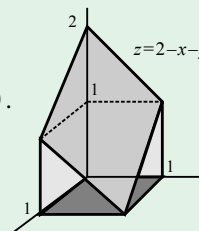
Lo más difícil de las integrales triples es dibujar las gráficas o al menos hacerse una idea de ellas para saber cuáles de las funciones que definen los recintos son mayores o menores.

Ej 2. Calculemos $\iiint_V x dx dy dz$, con V región acotada por los planos:

$$x=0, y=0, z=0, x=1, y=1, x+y+z=2.$$

En el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ del plano xy está $z=2-x-y$ por encima de $z=0$.

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x-y} x dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 (2x - x^2 - xy) dy dx \\ &= \int_0^1 (2x - x^2 - x[\frac{y^2}{2}]_0^1) dx = \int_0^1 (\frac{3x}{2} - x^2) dx = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

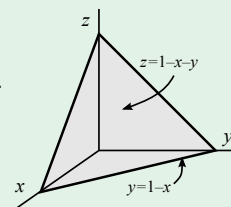


O un poquito más corto si cambiamos el orden de dx y dy . El primer paso es igual, y luego:

$$\int_0^1 \int_0^1 (2x - x^2 - xy) dx dy = \int_0^1 (1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y) dy = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}.$$

Ej 3. Halleemos $\iiint_V f$ con $f(x, y, z) = xyz$, y V el tetraedro de vértices $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

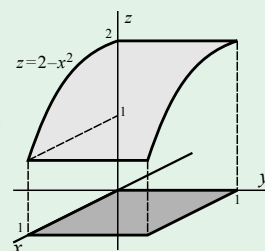
$$\begin{aligned} \iiint_V f &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} xyz dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{xy(1-x-y)^2}{2} dy dx \\ &= \int_0^1 [\frac{x(1-x)^4}{4} + \frac{x(1-x)^4}{8} - \frac{x(1-x)^4}{3}] dx = \int_0^1 \frac{x(1-x)^4}{12} dx = \frac{1}{360}. \end{aligned}$$



Ej 4. Calcular $\iiint_V e^z dx dy dz$, siendo V el sólido limitado por $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0$ y la superficie $z=2-x^2$.

En $[0, 1] \times [0, 1]$ es $z=2-x^2$ mayor que $z=0$ (no se necesita el dibujo).

$$\begin{aligned} \iiint_V &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2} x e^z dz dy dx = \int_0^1 \int_0^1 x [e^{2-x^2} - 1] dy dx \\ &= \int_0^1 [x e^{2-x^2} - x] dx = -\frac{1}{2} [e^{2-x^2} + x^2]_0^1 = \frac{1}{2} (e^2 - e - 1). \end{aligned}$$



Con hipótesis análogas a las del plano se tiene la fórmula para los **cambios de variable**:

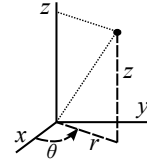
$$\text{Sea } \mathbf{g}: (u, v, w) \rightarrow (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \text{ de } C^1, \text{ inyectiva en } V^*, \mathbf{g}(V^*) = V$$

$$\text{y } f \text{ integrable } \Rightarrow \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} f(\mathbf{g}(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw .$$

[Vale aunque \mathbf{g} no sea inyectiva un número finito de puntos, curvas o superficies].

En particular nos interesan los cambios a **cilíndricas y esféricas**. Definamos cada una de estas coordenadas y familiaricémonos con ellas antes de hacer integrales.

Cilíndricas: $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$. O sea, polares del plano xy junto con la coordenada z .
 Dar las cilíndricas de un (x, y, z) es trivial para z ,
 y además es $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\tan \theta = \frac{y}{x}$.

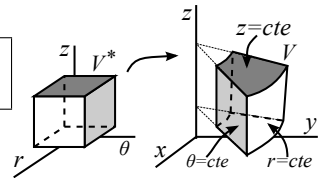


El jacobiano es: $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$ [localmente invertible si $r > 0$,
 e inyectiva en $r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$].

Con lo que la fórmula del cambio de variable adopta la forma:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} r f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) dr d\theta dz$$

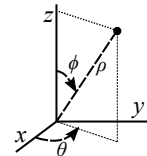
¿Qué conjuntos del espacio son sencillos en cilíndricas? Los puntos $r = C$ forman un cilindro, y los $\theta = C$ y $z = C$ planos (vertical y horizontal). Un paralelepípedo V^* se convierte en un V como el de la derecha.



[Podemos, como en polares, dar expresiones para el gradiente y el Laplaciano en cilíndricas:

$$\nabla f = f_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} f_\theta \mathbf{e}_\theta + f_z \mathbf{e}_z, \quad \begin{matrix} \mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_z = (0, 0, 1) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{[ortogonales} \\ \text{entre ellos]} \end{matrix}, \quad \Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r} f_r + \frac{1}{r^2} f_{\theta\theta} + f_{zz} .$$

Esféricas: $\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$. Como $\rho^2 = r^2 + z^2$, es $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
 Además: $\tan \theta = \frac{y}{x}$, $\tan \phi = \frac{r}{z}$ [mirando cuadrantes].
 [Los físicos suelen cambiar los nombres de ϕ y θ].



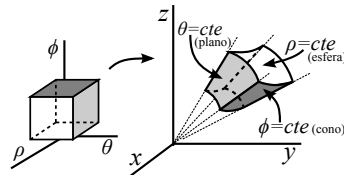
$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \begin{vmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{vmatrix} - \rho^2 \sin^3 \phi \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= -\rho^2 \sin \phi . \quad \text{[Cambio no inyectivo en todo el eje } z \text{].}$$

La integrales en esféricas se calculan, pues, mediante:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V^*} \rho^2 \sin \phi f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) d\rho d\theta d\phi$$

En esféricas, $\rho = C$ describe una superficie esférica,
 $\theta = C$ es un plano y $\phi = C$ una superficie cónica.
 Un recinto simple V en esféricas es, por tanto, el dibujado a la derecha.



[Se ve que el gradiente y el Laplaciano son aquí:

$$\nabla f = f_\rho \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho \sin \phi} f_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho} f_\phi \mathbf{e}_\phi, \quad \begin{matrix} \mathbf{e}_\rho = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi) \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \\ \mathbf{e}_\phi = (\cos \phi \cos \theta, \cos \phi \sin \theta, -\sin \phi) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{[ortogonales} \\ \text{de nuevo]} \end{matrix},$$

$$\Delta f = f_{\rho\rho} + \frac{2}{\rho} f_\rho + \frac{1}{\rho^2} f_{\phi\phi} + \frac{\cos \phi}{\rho^2 \sin \phi} f_\phi + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \phi} f_{\theta\theta} .$$

Ej 5. Escribamos el punto de coordenadas cartesianas $(-1, 1, -\sqrt{6})$ en los otros dos sistemas.

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \quad \tan \theta = -1 \text{ y } 2^\circ \text{ cuadrante } \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}. \text{ En cilíndricas: } (\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, -\sqrt{6}).$$

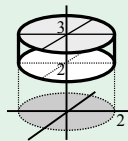
$$\rho = \sqrt{1+1+6} = 2\sqrt{2}. \quad \tan \phi = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \phi = \frac{5\pi}{6}. \quad (\rho, \theta, \phi) = (2\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}).$$

En los siguientes ejemplos se ve que muchos veces las cartesianas no son las coordenadas más adecuadas (si lo eran en los del principio de la sección). El primero pide cilíndricas (o polares), en el segundo lo más corto resultan ser las cilíndricas y en el tercero, integrando sobre esfera, lo son las esféricas.

Ej 6. Calcular la integral de la función $f(x, y, z) = z e^{x^2+y^2}$ sobre el cilindro $x^2+y^2 \leq 4, 2 \leq z \leq 3$.

$$\iiint_V z e^{x^2+y^2} dx dy dz = \int_2^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 r z e^{r^2} dr d\theta dz = \frac{9-4}{2} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{1}{2} e^{r^2} \right]_0^2 = \frac{5\pi}{2} (e^4 - 1).$$

Lo mismo que integrar en z y hacer luego el cambio a polares. En cartesianas no se puede hacer porque aparecen primitivas no calculables: $\int e^{x^2+y^2} dx$ o $\int e^{x^2+y^2} dy$.



Ej 7. Hallemos el volumen que encierran el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y el plano $z=0$ sobre el cuadrado $R=[0, 1] \times [0, 1]$.

Podemos hallarlo mediante integrales dobles o triples, en las coordenadas adecuadas en cada caso. Hacemos $\iiint_V dx dy dz$.

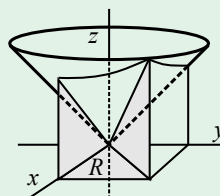
En cartesianas es fácil el recinto, pero difíciles las integrales:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \left[\begin{array}{l} \text{tablas o} \\ \sqrt{x^2+y^2} = x+u \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 [\sqrt{1+y^2} - y^2 \ln y + y^2 \ln(1+\sqrt{1+y^2})] dy = \dots \end{aligned}$$

En cilíndricas (o polares en la segunda integral): $x=1 \rightarrow r = \frac{1}{\cos \theta}$, cono y recinto simétricos,

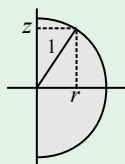
$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi/4} \int_0^{1/\cos \theta} r^2 dr d\theta &= \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta} \stackrel{u=\sin \theta}{=} \frac{2}{3} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{du}{(1-u^2)^2} = \frac{1}{6} \left[\log \left| \frac{1+u}{1-u} \right| - \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} \right]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]. \end{aligned}$$

Esféricas: $2 \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{1/\cos \theta \sin \phi} \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{d\phi d\theta}{\sin^2 \phi \cos^3 \theta} = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}$ como antes



Ej 8. Calculemos el conocido volumen de la esfera unidad. En esféricas:

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \phi d\phi d\rho d\theta = 2\pi \int_0^\pi 2\rho^2 d\rho = \frac{4\pi}{3}.$$



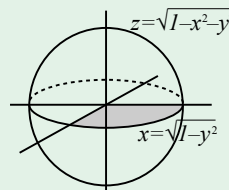
En cilíndricas por dos caminos (más largo):

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} r dr dz d\theta = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{1-z^2}{2} dz = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{vol} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r dz dr d\theta = 2\pi \int_0^1 2r\sqrt{1-r^2} dr = \frac{4\pi}{3}.$$

Las cartesianas son las coordenadas menos adecuadas aquí:

$$\begin{aligned} \text{vol} &= 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy = 8 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy \\ &= \dots [\text{cambio } x = \sqrt{1-y^2} \sin t] \dots = 8 \int_0^1 \frac{\pi}{4} (1-y^2) dy = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$



Aplicaciones físicas similares a las vistas para las integrales dobles son:

Masa de un sólido V es $M = \iiint_V D(x, y, z) dx dy dz$, si $D(x, y, z)$ es su densidad.

Centro de masa de V es $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ con $\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x D$, $\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y D$, $\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z D$.

Momento de inercia respecto al eje z : $I_z = \iiint_V (x^2+y^2) D$ (análogos los otros)].

Ej 9. Hallemos la posición del centro de masa de una semiesfera sólida homogénea.

Por simetría, será $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Volumen = $\frac{2}{3} \pi R^3$. [Masa = $\frac{2}{3} \pi R^3 D$, D constante].

$$\bar{z} = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^R \rho^3 \sin \phi \cos \phi d\rho d\phi d\theta = \frac{3}{R^3} \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^R \left[\frac{\sin^2 \phi}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3R}{8} = 0.375R.$$

[El recinto pedía a gritos utilizar las coordenadas esféricas].

