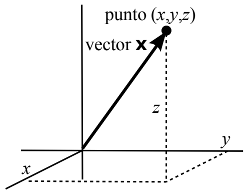
1. Conceptos básicos

1.1 El espacio $\mathbf{R}^n$. Rectas y planos. Abiertos y cerrados.

El conjunto $\mathbf{R}^n$ se define como $\boxed{\mathbf{R}^n \equiv \{\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n): x_k \in \mathbf{R}\}}$.

[Otras notaciones para los elementos de $\mathbf{R}^n$ son $\overline{x}$ o $\vec{x}$.]

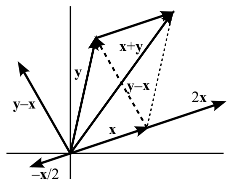


A cada elemento de $\mathbf{R}^n$ le llamaremos indistintamente **punto** o **vector** de $\mathbf{R}^n$. Casi todos nuestros ejemplos serán en $\mathbf{R}^2$ o $\mathbf{R}^3$ donde llamaremos $\mathbf{x}=(x,y)$ o $\mathbf{x}=(x,y,z)$. Un $\mathbf{x}\in\mathbf{R}^2$ se puede ver como el punto de coordenadas cartesianas (x,y) o como el vector que une el origen $(0,0)$ con (x,y) [análogo en $\mathbf{R}^3$]. $\mathbf{R}$ es caso particular de $\mathbf{R}^n$ y a los números reales se les llama a veces **escalares**.

La **suma de vectores** $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ se define: $\boxed{\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n)}$, y tiene las mismas propiedades que la suma de números reales: es conmutativa, asociativa, existe el elemento $\mathbf{0}=(0,\ldots,0)$ con $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ y el opuesto $-\mathbf{x}=(-x_1,\ldots,-x_n)$ con $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$. La diferencia de vectores se define entonces como $\mathbf{x}-\mathbf{y}=\mathbf{x}+(-\mathbf{y})=(x_1-y_1,\ldots,x_n-y_n)$.

El **producto de un escalar** $k\in\mathbf{R}$ **por un vector** $\mathbf{x}$ es el vector $\boxed{k\,\mathbf{x}=(kx_1,\ldots,kx_n)}$, con las propiedades: $k(m\mathbf{x})=(km)\mathbf{x}$, $(k+m)\mathbf{x}=k\mathbf{x}+m\mathbf{x}$, $k(\mathbf{x}+\mathbf{y})=k\mathbf{x}+k\mathbf{y}$, $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$, $0\,\mathbf{x}=k\,\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ estas dos definiciones tienen claro significado geométrico. Suma es vector diagonal del paralelogramo de lados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. O lo que es lo mismo, es el vector cuya punta es el punto en el que acaba $\mathbf{x}$ si llevamos paralelamente su base al extremo de $\mathbf{y}$. La diferencia la da la otra diagonal. $k\mathbf{x}$ es otro vector que tiene la misma dirección que $\mathbf{x}$ y que tiene mismo o distinto sentido que él. Su longitud, además, se ve modificada por el factor $|x|$.



Todas las propiedades anteriores eran inmediatas de demostrar a partir de las propiedades de $\mathbf{R}$.

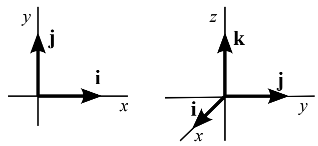
Un conjunto en el que haya dos operaciones con esas propiedades se llama **espacio vectorial** (estos conjuntos se tratan extensamente en el álgebra).

Son importantes los vectores de $\mathbf{R}^n$: $\mathbf{e}_1=(1,0,\ldots,0),\ldots,\mathbf{e}_n=(0,0,\ldots,1)$, pues todo vector se puede escribir como una suma de escalares por esos vectores: $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$.

[En idioma algebraico: $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}$ es la 'base canónica' del espacio vectorial de 'dimensión n' (número de elementos de la base) y todo vector se puede escribir como 'combinación lineal' (suma de escalares por vectores) de esos n elementos].

En $\mathbf{R}^2$ se suele escribir $\mathbf{e}_1=\mathbf{i}=(1,0)$ y $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}=(0,1)$.

Y en $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{e}_1=\mathbf{i}=(1,0,0)$, $\mathbf{e}_2=\mathbf{j}=(0,1,0)$, $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}=(0,0,1)$.

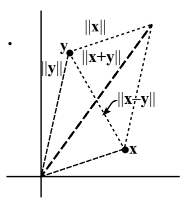


Otras definiciones que describen longitudes de vectores:

La **norma** o **módulo** de $\mathbf{x}$ es $\boxed{\|\mathbf{x}\|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}}$. La **distancia** de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ es $\boxed{d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|}$.

[Ambas son reales ≥ 0. En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, $\|\mathbf{x}\|$ es su longitud y $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ la distancia entre los puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$].

Propiedades de la norma: $\boxed{\|k\,\mathbf{x}\|=|k|\|\mathbf{x}\|,\ \|\mathbf{x}\|=0 \Leftrightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0},\ \|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|}$.



La última, **desigualdad triangular**, geométricamente afirma que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos. Las dos primeras son de demostración inmediata y probaremos la segunda después de definir el producto escalar].

Un vector se dice **unitario** cuando tiene norma 1. Los vectores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ son unitarios.

Dado cualquier $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ es muy fácil dar un vector unitario con su misma dirección y sentido: $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$.

Definamos dos importantes productos de vectores: el escalar y el vectorial.

Si $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ se define el **producto escalar** de dos vectores como $\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=x_1y_1+\cdots+x_ny_n}$.

[Obsérvese que $\|\mathbf{x}\|=(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})^{1/2}$ y que, por tanto, $\|\mathbf{x}\|^2=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$].

[El producto escalar de dos vectores es un **número real** que perfectamente puede ser negativo].

[En el caso particular de $\mathbf{R}$, el producto escalar es el producto y $\|x\|$ pasa a ser el valor absoluto $|x|$].

Las siguientes propiedades (menos la última, que demostramos) son fáciles de probar:

$$\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\mathbf{y}\cdot\mathbf{x},\ (k\,\mathbf{x})\cdot\mathbf{y}=k\,(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot(k\,\mathbf{y}),\ \mathbf{x}\cdot(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{x}\cdot\mathbf{z},\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}\geq 0,\ \underbrace{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}_{\text{desigualdad de Cauchy-Schwartz}}.}$$

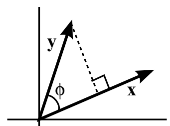
C-S: Si $\mathbf{y}=\mathbf{0}$ es trivial. Sea $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$ y sea el número real $k=\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}$. Entonces:

$$0\leq(\mathbf{x}-k\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-k\mathbf{y})=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}-2k\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+k^2\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|^2-\frac{|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2}{\|\mathbf{y}\|^2}\Rightarrow|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|^2\leq\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2\Rightarrow|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|\leq\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

Probemos ahora la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2=\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}+2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}+\mathbf{y}\cdot\mathbf{y}\leq\|\mathbf{x}\|^2+2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|+\|\mathbf{y}\|^2=\big(\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|\big)^2\Rightarrow\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\leq\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|.$$

Hay una forma alternativa de expresar un producto escalar, en términos de la norma de los vectores y del ángulo formado por ellos, que a veces resulta ser más útil que la inicial. Del teorema del coseno se deduce (ver Marsden-Tromba):



En $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ es $\boxed{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi}$, con $\phi\in[0,\pi]$ ángulo entre $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}\neq\mathbf{0}$.

De esto se deduce que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=0$ cuando son **perpendiculares** y que $\phi=\arccos\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|}$.

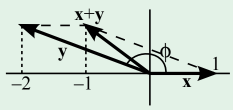
[$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ es, por tanto, el producto de la norma de un vector por la norma de la proyección del otro sobre él].

Ej 1. Sean $\mathbf{x}=(1,0)=\mathbf{i}$ e $\mathbf{y}=(-2,1)=-2\,\mathbf{i}+\mathbf{j}$. Entonces es:

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(-1,1)$. $\frac{1}{2}\mathbf{y}=(-\frac{1}{2},1)$. $\|\mathbf{x}\|=1$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{5}$, $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|=\sqrt{2}$.

Un vector unitario con la dirección y sentido de $\mathbf{y}$ es $(-\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$.

$\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=-2$ [como $\phi>\frac{\pi}{2}$ debía ser $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\cos\phi<0$; es $\phi=\arccos\frac{-2}{\sqrt{5}}$]. $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}|=2\leq\sqrt{5}=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$.



Para $n=3$, se define el **producto vectorial** de $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)$ e $\mathbf{y}=(y_1,y_2,y_3)$ como el vector:

$$\boxed{\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\end{vmatrix}=(x_2y_3-x_3y_2)\,\mathbf{i}-(x_1y_3-x_3y_1)\,\mathbf{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\,\mathbf{k}}$$

Propiedades inmediatas de este producto son: $\boxed{\mathbf{x}\times\mathbf{x}=\mathbf{0},\ \ \mathbf{x}\times\mathbf{y}=-\mathbf{y}\times\mathbf{x}}$.

Entre los vectores de la base canónica se dan las relaciones: $\boxed{\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}}$.

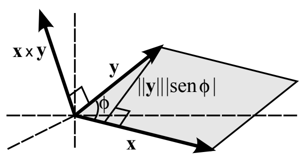
Lo que pasa con estos vectores ocurre en general. El vector $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ **es perpendicular** a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ (ver M-T) y tiene el sentido que sugieren esos ejemplos. [El que dice la 'ley de la mano derecha': si los dedos apuntan de $\mathbf{x}$ hacia $\mathbf{y}$, su producto vectorial tiene el sentido del pulgar]. Además, se tiene:

$$(x_2y_3-x_3y_2)^2+(x_1y_3-x_3y_1)^2+(x_1y_2-x_2y_1)^2=(x_1^2+x_2^2+x_3^2)^2(y_1^2+y_2^2+y_3^2)^2-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)^2$$

$$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|^2\overset{\uparrow}{=}\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2-(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2=\|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2(1-\cos^2\phi)$$

$$\Rightarrow\ \|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\,|\operatorname{sen}\phi|\ \Rightarrow$$

La **longitud** de $\mathbf{x}\times\mathbf{y}$ es el **área del paralelogramo** que tiene por lados adyacentes a los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.



Ej 2. Si $\mathbf{x}=(1,0,2)$, $\mathbf{y}=(-2,1,3)$ Su producto escalar es $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}=4$. $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{5}$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{14}$.

$\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|=\|(3,-1,-1)\|=\sqrt{11}$ nos proporciona la distancia entre los dos puntos $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

$\mathbf{x}\times\mathbf{y}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&0&2\\-2&1&3\end{vmatrix}=(0-2)\,\mathbf{i}-(3+4)\,\mathbf{j}+(1-0)\,\mathbf{k}=(-2,-7,1)$. Que es perpendicular a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$:

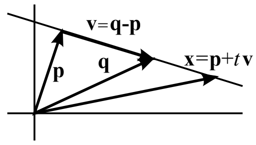
$(1,0,2)\cdot(-2,-7,1)=0$, $(-2,1,3)\cdot(-2,-7,1)=0$.

$\|\mathbf{x}\times\mathbf{y}\|=3\sqrt{6}$ nos da el área del paralelogramo cuyos lados son los vectores.

Rectas y planos

En el curso de Matemáticas, una **recta del plano** la escribíamos $y=mx+b$ ó $y=y_0+m(x-x_0)$, fijándonos en la pendiente m, la ordenada en el origen b o el punto (x_0,y_0) por el que pasaba.

Veamos otras expresiones ahora utilizando vectores. La recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}=(p_1,p_2)$ y $\mathbf{q}=(q_1,q_2)$ se puede escribir:



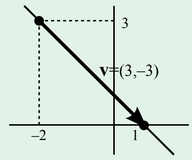
$$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p}) \quad \text{o} \quad \mathbf{x}=(1-t)\mathbf{p}+t\mathbf{q}\,,\ t\in\mathbf{R}\,.$$

[Para $t\in[0,1]$, $\mathbf{p}+t(\mathbf{q}-\mathbf{p})$ describe el segmento que une esos puntos].

O dado $\mathbf{p}$ y el vector dirección $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$: $\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{v}$, o en coordenadas: $\begin{cases} x=p_1+tv_1 \\ y=p_2+tv_2 \end{cases}$.

Ej 3. Describamos paramétricamente de varias formas el segmento que une $\mathbf{p}=(-2,3)$ y $\mathbf{q}=(1,0)$.

En coordenadas cartesianas la recta es $y=1-x$. De aquí: $(t,1-t)$, $t\in[-2,1]$.



Usando las expresiones de arriba, como $\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(3,-3)$, obtenemos:

$$\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(-2+3t,3-3t)\,,\ t\in[0,1]\,.$$

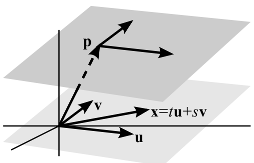
O cambiando los papeles de $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$: $\mathbf{q}+t(\mathbf{p}-\mathbf{q})=(1-3t,3t)$, $t\in[0,1]$.

[Las 2 primeras expresiones describen el segmento, al crecer t, en el mismo sentido y la tercera en el opuesto].

Las ecuaciones vectoriales de las **rectas en el espacio** son las mismas, pero con 3 coordenadas:

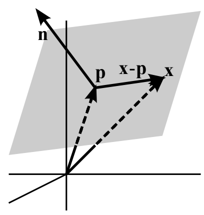
$\begin{cases} x=p_1+tv_1 \\ y=p_2+tv_2 \\ z=p_3+tv_3 \end{cases}$. Eliminando la t: $\frac{x-p_1}{v_1}=\frac{y-p_2}{v_2}=\frac{z-p_3}{v_3}$ [interpretando que el numerador es 0 si se anula su denominador].

La ecuación general de un **plano en el espacio** es $\boxed{ax+by+cz=d}$ [con a,b,c no las tres cero] [si $d=0$, pasa por el origen]



Si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son dos vectores (no múltiplo uno de otro), $\mathbf{x}=t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$, $t,s\in\mathbf{R}$ describe el plano que contiene esos vectores y pasa por el origen.

$\mathbf{x}=\mathbf{p}+t\mathbf{u}+s\mathbf{v}$ es otro plano, paralelo al otro y que pasa por $\mathbf{p}$ y los puntos $\mathbf{p}+\mathbf{u}$ y $\mathbf{p}+\mathbf{v}$.



Un plano queda también determinado conocidos un punto $\mathbf{p}$ suyo y un vector $\mathbf{n}$ normal (perpendicular) al plano pues: $\boxed{(\mathbf{x}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{n}=0}$.

Si $\mathbf{n}=(a,b,c)$, desarrollando: $a(x-p_1)+b(y-p_2)+c(z-p_3)=0$, que podemos poner $ax+by+cz=-ap_1-bp_2-cp_3$. Comparando con la ecuación escrita arriba, concluimos que un **vector normal a un plano** $ax+by+cz=d$ es el vector (a,b,c).

Ej 4. Demos varias expresiones para la recta que pasa por los puntos $\mathbf{p}=(1,2,-8)$ y $\mathbf{q}=(7,5,1)$.

Un vector dirección es $\mathbf{v}=\mathbf{q}-\mathbf{p}=(6,3,9)$, y la recta es: $\mathbf{p}+t\mathbf{v}=(1+6t,2+3t,-8+9t)$, $t\in\mathbf{R}$.

O con un vector más bonito $\mathbf{u}=(2,1,3)$ y $\mathbf{q}$ en vez de $\mathbf{p}$: $\mathbf{q}+t\mathbf{u}=(7+2t,5+t,1+3t)$, $t\in\mathbf{R}$.

Eliminando t, por ejemplo, de la segunda: $\begin{cases} x=7+2t \\ y=5+t \\ z=1+3t \end{cases} \to \frac{x-7}{2}=y-5=\frac{z-1}{3}$.

Y eligiendo dos pares de términos (nosotros los primero = tercero y segundo = tercero) obtenemos la recta como intersección de dos planos:

$$3x-21=2z-2\,,\ 3y-15=z-1\,,\ \text{es decir,}\ \begin{cases} 3x-2z=19 \\ 3y-z=14 \end{cases}.$$

Ej 5. Hallemos la ecuación del plano que pasa por $\mathbf{p}=(3,2,-1)$, $\mathbf{q}=(1,-1,3)$ y $\mathbf{r}=(3,-2,4)$.

Es perpendicular al plano, por ejemplo, $(\mathbf{q}-\mathbf{p})\times(\mathbf{r}-\mathbf{p})=(-2,-3,4)\times(0,-4,5)=(1,10,8)$.

El plano es, por tanto: $1(x-3)+10(y-2)+8(z+1)=0$, o sea, $x+10y+8z=15$.

Más largo es eliminar t y s de $\mathbf{x}=t(\mathbf{q}-\mathbf{p})+s(\mathbf{r}-\mathbf{p})=\begin{cases} x=3-2t \to t=\frac{3}{2}-\frac{x}{2} \searrow \\ y=2-3t-4s \qquad s=\frac{3x}{8}-\frac{y}{8}-\frac{5}{8} \searrow \cdots \\ z=-1+4t+5s \end{cases}$

O, aún peor, resolver el sistema $\begin{cases} 3a+2b-c=d \\ a-2b+3c=d \\ 3a-2b+4c=d \end{cases}$ [imponiendo que pase por los puntos] $\xrightarrow{\cdots} a=\frac{d}{5}$, $b=\frac{10d}{5}$, $c=\frac{8d}{5}$.

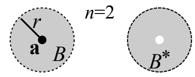
Conjuntos abiertos y cerrados

Entorno de centro $\mathbf{a}\in\mathbf{R}^n$ y radio $r>0$ es $B_r(\mathbf{a})\equiv\{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n:\ \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<r\}$

[A veces se le llama **disco** o **bola**].

Es un círculo en el plano y una esfera en el espacio, en ambos casos sin borde. [Para $n=1$ era un intervalo abierto centrado en el punto].

Llamaremos **entorno perforado** o reducido al conjunto $B_r^*(\mathbf{a})=B_r(\mathbf{a})-\{\mathbf{a}\}$.

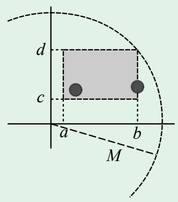


El punto $\mathbf{a}\in A$ es **interior** al conjunto $A\subset\mathbf{R}^n$ si hay algún r tal que el entorno $B_r(\mathbf{a})\subset A$.
A es **abierto** si todos sus puntos son interiores, es decir, si $A=\mathit{int}\,A\equiv\{\mathbf{x}$ interiores a $A\}$.
$\mathbf{p}\in\mathbf{R}^n$ es **punto de acumulación** de A si en todo entorno de $\mathbf{p}$ hay infinitos puntos de A.
A es **cerrado** si contiene a todos sus puntos de acumulación $\Leftrightarrow$ $\mathbf{R}^n-A$ es abierto (teorema).
Frontera o **borde** de A es $\partial A\equiv\{\mathbf{x}:\ \forall r,\ B_r(\mathbf{x})$ contiene puntos de A y de $\mathbf{R}^n-A\}$.
El **cierre** de A es el conjunto $\overline{A}=\mathit{int}\,A\cup\partial A$. $\overline{A}$ es un conjunto cerrado (teorema).
A es **acotado** si existe $M\in\mathbf{R}$ con $\|\mathbf{x}\|<M$ $\forall\mathbf{x}\in A$. A es **compacto** si es cerrado y acotado.

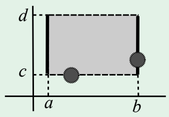
[La demostración del primer teorema es la misma que se vió en $\mathbf{R}$, y si $\mathbf{p}$ es de acumulación de $\overline{A}$ o pertenece a ∂A si en cualquier entorno suyo hay, además de los infinitos puntos de A, otros que no son de A, o pertenece $\mathit{int}\,A$ si para algún r todos son de A].

[Intuitivamente, A es abierto cuando no contiene a su frontera, y cerrado cuando lo hace].

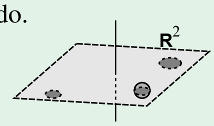
Ej 6. El producto cartesiano de intervalos abiertos $(a,b)\times(c,d)$ (rectángulo sin borde) es un conjunto A abierto en $\mathbf{R}^2$: para cualquier $\mathbf{a}$ del conjunto hay un $B_r(\mathbf{a})\subset A$ (por ejemplo, si r es el mínimo de las distancias a los 4 lados). A no es cerrado pues los puntos de ∂A son de acumulación y no son de A. Como su frontera ∂A son los 4 lados, es $\overline{A}=[a,b]\times[c,d]$. $\overline{A}$ no es abierto (los puntos de ∂A no son interiores) y es cerrado, pues sus puntos de acumulación son los puntos de A o de ∂A y todos son del conjunto. Como también $\overline{A}$ es acotado es compacto.



Ej 7. Hay conjuntos que no son no ni abiertos ni cerrados, como $A=[a,b]\times(c,d)$. Los puntos de los lados derecho e izquierdo son de A, pero no son interiores. Los de los lados superior e inferior son de acumulación y no son de A.
[Los únicos conjuntos abiertos y cerrados a la vez son el $\varnothing$ y $\mathbf{R}^n$].



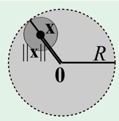
Ej 8. Es inmediato comprobar que $\mathbf{R}^2$ como subconjunto de $\mathbf{R}^2$ es abierto y cerrado. Pero visto como subconjunto de $\mathbf{R}^3$ no es abierto pues ninguno de sus puntos es interior: dado cualquier $\mathbf{a}$ cualquier bola $B_r(\mathbf{a})$ se sale de $\mathbf{R}^2$. Sigue siendo cerrado como subconjunto de $\mathbf{R}^3$ (pero no está acotado y no es compacto).



Ej 9. $A=B_R(\mathbf{0})$ es, para cualquier R, un conjunto abierto en $\mathbf{R}^n$:

Para cualquier $\mathbf{x}\in B_R(\mathbf{0})$, $\exists\, r=R-\|\mathbf{x}\|$ tal que $B_{R-\|\mathbf{x}\|}(\mathbf{x})\subset A$,

pues si $\mathbf{y}\in B_{R-\|\mathbf{x}\|}(\mathbf{x})$ es $\|\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|+\|\mathbf{x}\|<R-\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{x}\|=R$.



[imagen en $\mathbf{R}^2$ para intuir].

1.2 Gráficas de funciones escalares

$$\boxed{\begin{array}{c} f: D\subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ \mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n) \to f(\mathbf{x}) \end{array}}$$

Los **campos escalares** (también llamadas **funciones escalares** o funciones reales de varias variables reales) asignan a cada punto $\mathbf{x}$ de un **dominio** $D\equiv \mathrm{dom}\, f$ un único número real $f(\mathbf{x})$.

[Si no se dice nada más, el dominio D del campo serán los $\mathbf{x}$ para los que f tiene sentido].

La **imagen** o **recorrido** de f será (igual que en $\mathbf{R}$) el conjunto $\mathrm{im} f = f(D) \equiv \{ f(\mathbf{x}) : \mathbf{x}\in D\}$.

Su **gráfica** es el conjunto de puntos de la forma $(x_1,\ldots, x_n, f(x_1,\ldots,x_n))$, con $(x_1,\ldots,x_n)\in D$.

Si $n=1$ es una curva en el plano. Si $n\geq 3$ se mueve en un espacio de dimensión ≥ 4 y no es dibujable. Pero si $n=2$, es una **superficie** en el espacio que se puede trazar en perspectiva.

$$\boxed{\begin{array}{c} f: \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{array}}$$

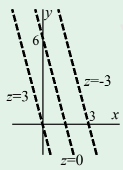
Para esquematizar (sin ordenador) su gráfica $z=f(x,y)$ hallaremos **secciones** (curvas en el espacio) obtenidas cortando la superficie con diferentes planos.

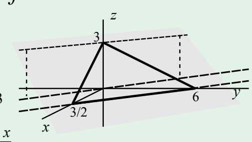
Unas secciones interesantes se consiguen cortando con planos $z=\mathrm{cte}$, llamadas **curvas de nivel** (es decir, curvas del plano xy sobre las que f toma un valor constante). Otras fáciles de calcular son las obtenidas al hacer $x=\mathrm{cte}$ o $y=\mathrm{cte}$ (en particular los cortes con los planos yz o xz).

Ej 1. Comencemos esquematizando un par de planos. El primero lleva a una f de las anteriores:

$\boxed{4x+y+2z=6}$ $\to$ $z=f(x,y)=3-2x-\frac{1}{2}y$. Los cortes con los 3 planos coordenados son $z=3-2x$, $z=3-\frac{1}{2}y$, $y=6-4x$. Las curvas (rectas) de nivel son: $z=C$ $\to$ $y=6-2C-4x$ $\nearrow C=0$

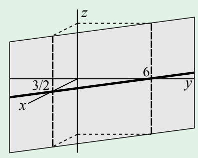
[Sabemos además que el vector $(4,1,2)$ es normal al plano].





$\boxed{4x+y=6}$ no define $z=f(x,y)$ pero, al no depender de z , es fácil dar su gráfica: la recta $y=6-4x$ trasladada verticalmente.

[Igual de fácil sería si no dependiese de y o de x].

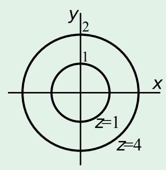


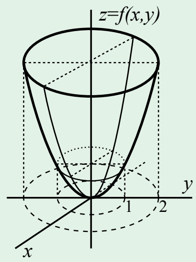
Ej 2. $\boxed{f(x,y)=x^2+y^2}$. Las curvas de nivel, dadas por $x^2+y^2=C$, son circunferencias, de radio $\sqrt{C}$, $C\geq 0$

[si $C=0$ es sólo $(0,0)$, la imagen es $[0,\infty)$].

Las secciones con $\begin{array}{l} x=0 \to z=y^2 \\ y=0 \to z=x^2 \end{array}$ son parábolas. Es fácil (en este caso) dibujar la gráfica (un '**paraboloide de revolución**').

[Si las curvas de nivel son circunferencias centradas, lo que sucede cuando f depende de x^2+y^2 , la superficie es de revolución].



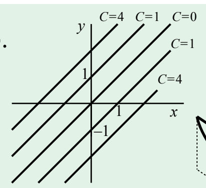


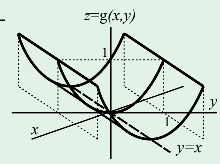
Ej 3. $\boxed{g(x,y)=(x-y)^2}$ $=C$ $\to$ $x-y=\pm\sqrt{C}$ (rectas paralelas).

En concreto, si $C=0,1,4$ se tiene $y=x$, $y=x\pm 1$, $y=x\pm 2$.

El corte con $x=0$ es una parábola: $z=y^2$. También lo son los cortes con $y=0$ ($z=x^2$) o con $y=-x$ ($z=4x^2$).

Viene a ser la gáfica de la parábola $z=y^2$ trasladada en horizontal siguiendo la recta $y=x$ (que es donde se anula la g).





Ej 4. $\boxed{h(x,y)=y^2-x^2}$. Dibujemos la gráfica de este 'paraboloide hiperbólico' (silla de montar).

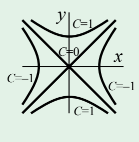
Los cortes con $y=0$ y $x=0$ son las parábolas $z=-x^2$ y $z=y^2$

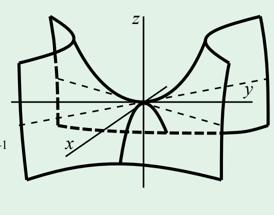
[y en general son parábolas los cortes con $y=C$ y $x=C$].

Las curvas de nivel son las hipérbolas $y^2-x^2=C$

[en particular, para $C=0$ son las rectas $y=\pm x$].

No es fácil hacer el dibujo en 3 dimensiones, pero las curvas de nivel y los cortes ya nos daban una idea de la gráfica.

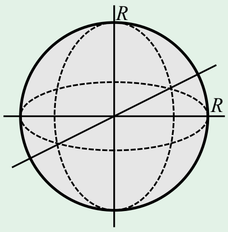




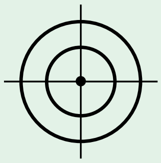
Hay otras superficies importantes que definen más de una (o no definen ninguna) función escalar. Las 3 siguientes no vienen dadas en la forma $z=f(x,y)$ sino en la forma más general $F(x,y,z)=k$.

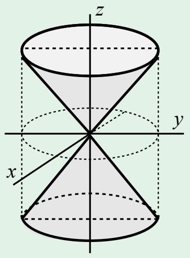
Ej 5. Dibujamos $\boxed{x^2+y^2+z^2=R^2}$ (superficie esférica) , $\boxed{z^2=x^2+y^2}$ (cono), $\boxed{x^2+y^2=1}$ (cilindro).

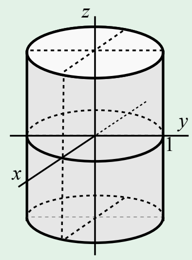
Las primeras definen dos campos escalares $z=f(x,y)$: $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ y $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, y la otra ninguno (el + describe la parte superior de la superficie esférica o el cono y el − la inferior).



[las curvas de nivel son circunferencias]







Los cortes con $x=0$ son la circunferencia $z=\pm\sqrt{R^2-y^2}$ (esfera), y las rectas $z=\pm y$ (cono).

El cilindro no depende de z . Es la circunferencia unidad llevada verticalmente (desde $-\infty$ hasta ∞).

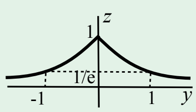
En todos los ejemplos vistos hasta ahora aparecían potencias ≤ 2 , con lo que son varios tipos de '**cuádricas**': $Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+ax+by+cz=d$ (equivalentes a las cónicas en R^3). Los términos en xy, xz, yz vienen a girar la cuádrica y los x, y, z a trasladar su centro. Además de las dibujadas, en problemas aparecerán otras: elipsoides, hiperboloides de una y dos hojas,... y en esa expresión general se pueden ocultar otro tipo de objetos, como planos o el conjunto vacío.

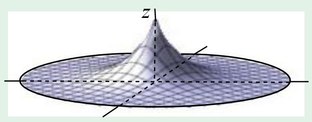
Dibujemos otra superficie fácil, pero definida a través de una exponencial:

Ej 6. $\boxed{k(x,y)=\mathrm{e}^{-\sqrt{x^2+y^2}}}$. Es de revolución, porque sobre $x^2+y^2=C$ es constante (vale $\mathrm{e}^{-\sqrt{C}}$).

Basta dibujar el corte con $x=0$ (con el plano del papel) para deducir su gráfica.

$k(0,y)=\mathrm{e}^{-\sqrt{y^2}}=\mathrm{e}^{-|y|}$, par y es e^{-y}, si $y\geq 0$.



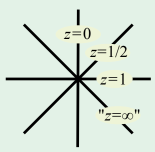


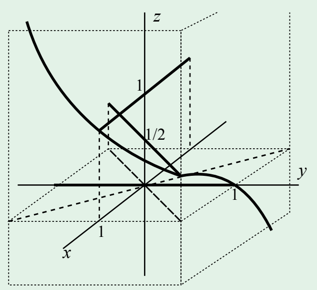
[Es fácil hacer el dibujo pero nos hemos ayudado del ordenador (del Maple)].

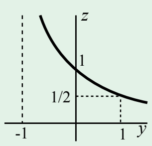
Pero es claro que, en general, aunque se puedan dibujar algunas secciones será muy difícil dar su gráfica en perspectiva, aunque se pueda dar una idea de 'por donde va la gráfica'. Como la siguiente:

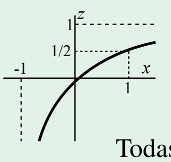
Ej 7. $r(x,y)=\frac{x}{x+y}=C \;\to\; y=x(\frac{1}{C}-1)$ (rectas pasando por el origen).

Dando valores a C , o mejor, como son $y=mx$, dando valores a m en $r(x,mx)=\frac{1}{1+m}$, se tienen las curvas de nivel (y ya una idea de la gráfica).









Los cortes con:

$x=1 \to z=\frac{1}{1+y}$, $y=1 \to z=\frac{x}{x+1}$

son los dibujos de la izquierda.

Todas las rectas y curvas pintadas en el espacio pertencen a la superficie.

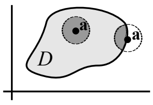
[Para $n=3$ lo único que se puede dibujar (si son sencillas) son sus 'superficies de nivel' $f(x,y,z)=C$. Por ejemplo, esas superficies de nivel son para $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ esferas de diferente radio].

1.3 Límites y continuidad en $\mathbf{R}^n$

Las definiciones de **límite** y **continuidad** para un campo escalar $f: D\in\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de dominio D son muy parecidas (aparentemente) a las de $\mathbf{R}$. Si $\mathbf{a}$ es interior a D es casi igual:

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=L \text{ si } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } 0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \text{ entonces } |f(\mathbf{x})-L|<\varepsilon .}$$

Para $n=2$, esto significa que debe existir un δ tal que la imagen de f en $B^*_\delta(\mathbf{a})$ esté comprendida entre los planos $z=L-\varepsilon$ y $z=L+\varepsilon$, por pequeño que sea ε.



Con otra definición (generaliza los límites laterales) también incluimos los $\mathbf{a}\in\partial D$:

$$\boxed{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=L \text{ si } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que si } x\in D \text{ y } 0<\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \text{ entonces } |f(\mathbf{x})-L|<\varepsilon .}$$

La definición de continuidad para puntos interiores es también como la de $\mathbf{R}$:

$$\boxed{f \text{ continua en } \mathbf{a}\in intD \Leftrightarrow \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=f(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \forall\varepsilon\ \exists\delta \text{ tal que } \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta \Rightarrow |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|<\varepsilon .}$$

Y si D incluye su frontera y $\mathbf{a}\in\partial D$ basta añadir $x\in D$ para definir su continuidad.

Decir que una f es continua en un conjunto A significa que lo es en todos los puntos de A.

Teoremas (como los de $\mathbf{R}$ y que no demostramos) aseguran que **suma**, **producto** y **cociente con denominador no nulo** de f y g continuas son continuas. Y también lo es la composición de campos escalares con funciones reales continuas:

Teor 1. $\boxed{f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \text{ continua en } \mathbf{a},\ g: \mathbf{R}\to\mathbf{R} \text{ continua en } f(\mathbf{a}) \Rightarrow g\circ f \text{ continua en } \mathbf{a}.}$

[En $\mathbf{R}$ probamos estos teoremas utilizando sucesiones que aquí no hemos tratado y podríamos usar ahora sólo la definición $\varepsilon-\delta$. Por ejemplo, para éste bastaría precisar que $|g(f(\mathbf{x}))-g(f(\mathbf{a}))|<\varepsilon$ si $\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\delta$ lo que es cierto porque entonces $|f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|$ es pequeño y g es continua en $f(\mathbf{a})$].

Probemos que $f(\mathbf{x})=C$ y que $f(x_1,\dots,x_n)=x_k$ son continuas en todos los puntos de $\mathbf{R}^n$:

$$|f(\mathbf{x})-C|=0<\varepsilon\ \forall\delta , \quad |f(\mathbf{x})-f(\mathbf{a})|=|x_k-a_k|\le\|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|<\varepsilon \text{ si } \delta=\varepsilon .$$

De ello y los teoremas deducimos que muchísimos campos escalares lo son en todos o en casi todos los puntos a simple vista. Por ejemplo, son obviamente continuas en todo $\mathbf{R}^2$ las funciones

$f(x,y)=\frac{xy-x^2}{y^2+3}$ (cociente de polinomios en xy con denominador no nulo) o

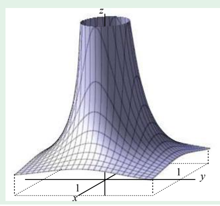
$f(x,y)=e^{xy}$ (composición del campo $f(x,y)=xy$ y la continua $g(z)=e^z$).

También son continuos los campos de los ejemplos 1-4 y 6 de 1.2. [Y también $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ en todo su dominio $\|(x,y)\|\le R$, borde incluido, con la definición de continuidad en puntos frontera].

Sólo hay que detenerse a mirar la continuidad en algunos puntos patológicos (como sucedía en $\mathbf{R}$). Pero aquí el análisis muchas veces se complica. Veamos más ejemplos en $\mathbf{R}^2$:

Ej 1. $f(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}$ es claramente continua para $(x,y)\neq(0,0)$ y no tiene límite en ese punto ('tiende a ∞', es decir, para $\mathbf{x}$ en un entorno $B^*_\delta(\mathbf{0})$ toma valores mayores que cualquier K dado para δ pequeño).

[No sería difícil dibujar nosotros la gráfica de esta superficie de revolución, pero de nuevo le hemos pedido al Maple que lo haga en $[-1,1]\times[-1,1]$].



Ej 2. $f(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{sen}\frac{1}{x^2+y^2}$, con $f(0,0)=0$, es también obviamente continua si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$.

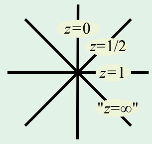
Para ver que lo es además en el origen podemos acudir a la definición

$$|f(x,y)-f(0,0)|\le|x^2+y^2|<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta=\sqrt{\varepsilon} ,$$

o mirarla como composición de la conocida continua $g(x)=x\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ y el campo $h(x,y)=x^2+y^2$, o incluso utilizar que sigue siendo aquí cierto (y es fácil de probar) que 'cero $\times$ acotado = cero'.

Ej 3. El ejemplo 7 de 1.2: $r(x,y)=\frac{x}{x+y}$ es evidentemente continua todo (x,y) tal que $x+y\neq 0$.

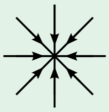
Que es discontinua en el origen queda muy claro a la vista de las curvas de nivel: tan cerca del punto como queramos (por pequeño que sea el δ) hay puntos en los que r vale 0, otros en los que vale $1/2$, en otros 1, ...



¿Existe el límite en algún otro punto $(a,-a)$? No, porque cerca de cada uno [el (0,0) incluido] r toma valores tan grandes (y tan pequeños) como queramos, como nos aseguran, por ejemplo, las secciones con cada $x=a\neq 0$: $z=\frac{a}{a+y}$ que tienen asíntota vertical en $y=-a$.

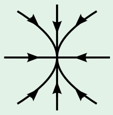
Ej 4. $f(x,y)=\frac{xy^2}{x^2+y^4}$, $f(0,0)=0$ vuelve a ser continua claramente si $\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$. ¿Lo es en $(0,0)$?

Vamos a acercarnos al origen a lo largo de diferentes curvas.



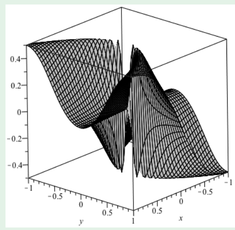
Empezamos con las rectas $y=mx$: $f(x,mx)=\frac{m^2x}{1+m^4x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Pero esto no es la definición del límite en $\mathbf{R}^2$.



Sigamos ahora las parábolas $x=py^2$: $f(py^2,y)=\frac{p}{p^2+1}$.

Tan cerca como queramos del origen hay puntos en los el campo vale, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ $(p=1)$. **Discontinua** en $\mathbf{0}$.



[Dibujada con un ordenador, presenta f el aspecto feo del dibujo de la derecha].

[Acercarse al punto problemático siguiendo diferentes curvas y obtener siempre el mismo límite no nos prueba nunca la existencia del límite en $\mathbf{R}^n$, pues quedan siempre infinitas formas distintas de acercarse. Con estos cálculos lo que a veces conseguimos (como en el ejemplo anterior) es probar que no existe].

Para calcular límites (y analizar la continuidad) en $(0,0)$ a veces es útil (en general lo complica) utilizar las **coordenadas polares**: $x=r\cos\theta$, $y=\operatorname{sen}\theta$:

Ej 5. Sea $f(x,y)=\frac{x^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. ¿Es continua en $(0,0)$? Escrito en polares, $f(r,\theta)=r\cos^3\theta$.

Con esta expresión queda claro que cerca del origen se puede hacer tan pequeño como queramos:

$$|f(r,\theta)-0|=r|\cos^3\theta|\leq r<\varepsilon \text{ si } \|(x,y)-(0,0)\|=r<\delta=\varepsilon .$$

Usar cartesianas exige más vista: $\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}-0\right|=|x|\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|\leq|x|\leq\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon$ si $\|(x,y)\|<\delta=\varepsilon$.

Generalicemos la idea del cálculo anterior con un teorema:

Teor 2. $\boxed{\text{Si } |f(r,\theta)-L|\leq g(r) \text{ y } g(r)\underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ entonces } \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=L .}$

[Pues $|f(r,\theta)-L|<\varepsilon$ para el δ que garantiza que $|g(r)-0|<\varepsilon$].

El teorema **no dice** que el límite exista si $f(r,\theta)\underset{r\to 0}{\longrightarrow} L$ como muestra este último ejemplo:

Ej 6. Para $f(x,y)=\frac{y^4}{x^2}$, $f(0,y)=0$ se cumple que $f(r,\theta)=r^2\frac{\operatorname{sen}^4\theta}{\cos^2\theta}\underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$ (incluso si $x=0$, $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$).

Pero cualquier corte con $y=a\ \to\ z=\frac{a^4}{x^2}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\infty$ y no tiene límite en $(0,0)$ [ni en ningún $(0,a)$].

[Que $f(r,\theta)\to 0$ viene a equivaler a que el límite por rectas sea 0. En este caso $f(x,mx)=m^4x^2\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$].

Acabamos la sección admitiendo el siguiente importante teorema sobre continuidad generaliza el conocido resultado del cálculo en $\mathbf{R}$ para funciones continuas en intervalos cerrados:

Teor 3. $\boxed{f \text{ continua en un compacto } A \Rightarrow f \text{ alcanza sus valores máximo y mínimo en } A .}$

[Si f es discontinua, o A no es cerrado o no acotado es fácil dar ejemplos en los que alguno de los extremos no se alcanza].

[Para calcular esos extremos, como en $\mathbf{R}$, habrá que acudir a derivadas].