

## Soluciones problemas 1. Ecuaciones I (C). 08/09

- 1.1** a)  $y' = y - (2+2\cos t)y^2$  Bernouilli:  $z = \frac{1}{y} \rightarrow z' = -z + (2+2\cos t) \rightarrow y = \frac{1}{Ce^{-t} + 2 + \sin t + \cos t}$ .
- b)  $y' = \frac{2ty-y^2}{t^2}$  homogénea:  $z = \frac{y}{x} \rightarrow tz' + z = 2z - z^2, \int \frac{dz}{z(1-z)} = \int \frac{dt}{t} + C \rightarrow y = \frac{Ct^2}{1+Ct} = \frac{t^2}{C^*+t}$ ;  
o Bernouilli:  $z = \frac{1}{y} \rightarrow z' = -\frac{2z}{t} + \frac{1}{t^2} \rightarrow z = \frac{C+t}{t^2} \rightarrow y = \frac{t^2}{C+t}$ .
- c)  $y' = 1 - \frac{2}{t+y}$ ;  $t+y = z \rightarrow z' = 2 - \frac{2}{z} \rightarrow z + \log|z+1| = 2t + C \rightarrow y - t + \log|t+y-1| = C$ .
- d)  $y' = \frac{t^2+y}{t}$  lineal:  $z = Ct + t \int \frac{t dt}{t} \rightarrow y = Ct + t^2$ .
- e)  $12x+5y-9 + (5x+2y-3)y' = 0$ ;  $M_y = N_x = 5$  (exacta)  $\rightarrow y^2 + 6x^2 + 5xy - 3y - 9x = C$ ;  
o bien (1.2):  $\begin{cases} 12x+5y-9=0 \\ 5x+2y-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u=x+3 \\ v=y-9 \end{cases} \rightarrow \frac{dv}{du} = -\frac{12u+5v}{5u+2v} \xrightarrow{z=v/u} \frac{(2z+5)z'}{z^2+5z+6} = \frac{-2}{u} \rightarrow v^2 + 5uv + 6u^2 = C^1$
- f)  $y' = x + \frac{x}{y}$  separable:  $\int \frac{y dy}{1+y} = \int x dt + C \rightarrow y - \log|1+y| = \frac{x^2}{2} + C$ .
- g)  $y' = y + \sin x$  lineal:  $y = Ce^x + e^x \int e^{-x} \sin x dx \rightarrow y = Ce^x - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$ .  
[Sin integrar:  $y_p = A \cos x + B \sin x \rightarrow -As + Bc = Ac + Bs + s \rightarrow B = A, -A = B + 1 \rightarrow A = B = -\frac{1}{2}$ ].
- h)  $y' = \frac{y}{x+y^3}$ ;  $\frac{N_x - M_y}{M} = -\frac{2}{y} \rightarrow y^{-2}$  factor integrante;  $-\frac{1}{y} + (\frac{x}{y^2} + y)$  exacta  $\rightarrow \frac{y^2}{2} - \frac{x}{y} = C$ ;  
mucho más corto:  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} + y^2$  lineal:  $x = Cy + y \int \frac{y^2}{y} dy = Cy + \frac{y^3}{3}$
- i)  $y' = 2t - t^2 + y^2$  Riccati;  $y_p = At + B \rightarrow A = 2t - t^2 + A^2 t^2 + 2ABt + B^2 \rightarrow A = B^2, 0 = 2AB + 2, 0 = A^2 - 1$   
 $\rightarrow y_p = t - 1. u = y - y_p \rightarrow u' = 2(t-1)u + u^2 \xrightarrow{u=1/z} z' = -2(t-1)z - 1 \rightarrow y = t - 1 + \frac{e^{t^2-2t}}{C - \int e^{t^2-2t} dt}$ .
- j)  $y - 2ty - y^2 + (t+y)y' = 0$ ;  $e^{-2t}$  f. integrante,  $(y - 2ty - y^2)e^{-2t} + (t+y)e^{-2t}y' = 0 \rightarrow y^2 + 2ty = Ce^{2t}$ .
- k)  $y' = \frac{1-2ty^3}{3t^2y^2}$  Bernouilli:  $3y^2y' = -\frac{2}{t}y^3 + \frac{1}{t^2} \xrightarrow{z=y^3} z' = -\frac{2z}{t} + \frac{1}{t^2} \rightarrow z = \frac{C}{t^2} + \frac{1}{t} \rightarrow y = [\frac{C+t}{t^2}]^{1/3}$ ;  
o exacta:  $2ty^3 - 1 + 3t^2y^2y' = 0, M_y = N_t = 6ty^2, U = t^2y^3 - t + p(y) \rightarrow t^2y^3 - t = C^1$   
 $U = t^2y^3 + q(t)$
- l)  $(y')^2 = 9y^4, y' = \pm 3y^2$  (dos ecuaciones),  $\pm \frac{1}{y} = 3t + C, y = \frac{1}{C \pm 3t}$ .

- 1.2**  $\frac{dy}{dx} = f(\frac{ax+by+m}{cx+dy+n})$  se convierte en separable con estos cambios: si  $m=n=0, z = \frac{y}{x}$  [es  $y' = f(\frac{y}{x})$ ];  
si  $m^2+n^2 \neq 0$  y  $ad-bc=0, z = ax+by$  [es  $y' = f(ax+by)$ ];  
si  $m^2+n^2 \neq 0, ad-bc \neq 0, \begin{cases} ax_0+by_0+m=0 \\ cx_0+dy_0+n=0 \end{cases}, u = x-x_0, v = y-y_0, z = \frac{v}{u}$ .
- $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+2}{-2x+y+6}$   $\begin{cases} x+2y+2=0 \\ y-2x+6=0 \end{cases} \rightarrow (2, -2)$  corte de las rectas;  $\begin{cases} u=x-2 \\ v=y+2 \end{cases} \rightarrow \frac{dv}{du} = -\frac{u+2v}{v-2u} \xrightarrow{z=v/u} \frac{(z-2)z'}{1+4z-z^2} = \frac{1}{v}$   
 $\rightarrow u^2 + 4uv - v^2 = C \rightarrow (x-2)^2 + 4(x-2)(y+2) - (y+2)^2 = C$ .

- 1.3**  $y' = -3y + 3ty^{2/3}$  (Bernouilli)  $\xrightarrow{z=y^{1/3}} z' = -z + t \rightarrow z = Ce^{-t} + t - 1 \rightarrow y = (Ce^{-t} + t - 1)^3$ .  
 $f$  continua en  $\mathbf{R}^2, f_y = -3 + 2ty^{-1/3}$  en  $\mathbf{R}^2 - \{y=0\} \Rightarrow$  solución única con  $y(t_0) = y_0$  si  $y_0 \neq 0$  y hay solución, quizás no única, si  $y_0 = 0$ . Por tanto, para ii) hay una solución:  $1 = (C-1)^3 \rightarrow y = (2e^{-t} + t - 1)^3$ .  
Para i) la solución general nos da una solución:  $0 = (Ce^{-1})^3 \rightarrow y = (t-1)^3$ . Pero  $y \equiv 0$  es otra solución clara perdida en los cálculos. No hay unicidad.

- 1.4**  $y' = \frac{y}{t} + \sin t$  i) Si  $y(a) = b, b \neq 0$  solución única. ii)  $y(0) = 0$  para todas las soluciones  $y = Ct + t \int \frac{\sin t}{t} dt$ .

- 1.5**  $(y^2 + 2xy)h(y) - (x^2 + 2y^2)h(y)\frac{dy}{dx} = 0$  exacta si  $h'(y) = \frac{-2}{y}, h(y) = \frac{1}{y^2} \rightarrow x^2 + xy - 2y^2 = Cy$  [\*].  
(También es homogénea:  $z = \frac{y}{x} \rightarrow \int \frac{(2z^2+1)dz}{z(2z^2-z-1)} = \ln \frac{(2z+1)(z-1)}{z} = C - \ln x, \frac{(2y+x)(y-x)}{y} = C$ ).  
Soluciones rectas:  $f(x, mx) = \frac{m^2+2}{1+2m^2} = m \rightarrow y=0$  (no recogida en [\*]),  $y=x, y = -\frac{x}{2}$ .  
i)  $y=0$ , ii)  $y=x$ , soluciones únicas, pues  $f$  y  $f_y$  son continuas en entorno de  $(1, 0)$  y  $(1, 1)$ .

**1.6**  $y' = \sqrt{y/x}$  Isoclinas  $y = mx \rightarrow f(x, mx) = \sqrt{m} \rightarrow y = 0, y = x$  soluciones

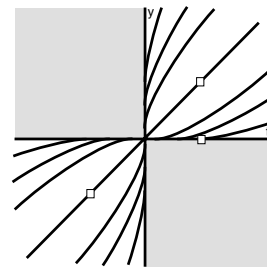
( $x=0$  es curva integral, solución de la 'equivalente').

Solución única para i) e iii) (la  $y=x$  en ambos casos).

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} + C \rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x} + C, \text{ si } x, y > 0.$$

$$(\sqrt{-y} = \sqrt{-x} + C, \text{ si } x, y < 0).$$

Satisfacen  $y(1)=0$  las soluciones  $y=0$  e  $y=(\sqrt{x}-1)^2, x \geq 1$ .



**1.7**  $(y^2-t)+2yy'=0$  no exacta. Para que  $(y^2-t)g(t)+2yg(t)y'=0$  lo sea:  $2yg=2yg' \rightarrow g(t)=e^t \rightarrow$

$$e^t(y^2-t)+2e^tyy'=0 \rightarrow U=e^ty^2-te^t+e^t+p(y) \rightarrow e^t(y^2-t+1)=C, \quad y^2=Ce^{-t}+t-1.$$

También es de Bernoulli con  $p=-1$ :  $2yy'=t-y^2 \xrightarrow{y^2=z} z'=-z+t \rightarrow z=Ce^{-t}+e^{-t}\int te^t dt$

El TEyU asegura **solución única** con  $y(t_0)=y_0$  si  $y_0 \neq 0$ . Para el dato i) por ejemplo:

$$1=C-1, y^2=2e^{-t}+t-1, \quad y=-\sqrt{2e^{-t}+t-1} \quad (\text{la raíz positiva no lo cumple}).$$

Para ii) el TEyU no decide. Como  $\frac{dt}{dy} = \frac{2y}{t-y^2}$  tiene solución única  $t(y)$  con  $t(0)=1$  (y es  $t'(0)=0$ ), sólo pasa una curva integral de pendiente vertical por  $(1, 0)$  y **no hay solución** que cumpla ii).

[Lo que sale imponiendo el dato,  $y=\pm\sqrt{t-1}$ , son dos funciones con derivada infinita en  $t=1$ ].

**1.8** En una homogénea (de isoclinas  $y=mt$ ) las rectas solución salen de:

$$f(m)=(m-1)^2+1=m \rightarrow m=1, 2 \rightarrow y=t \text{ e } y=2t.$$

$$i) tz'+z=z^2-2z+2, \int \frac{dz}{(z-1)(z-2)} = \int \frac{dz}{z-2} - \int \frac{dz}{z-1} = \ln \frac{z-2}{z-1} = \ln t + C, \quad \frac{y-2t}{y-t} = Ct$$

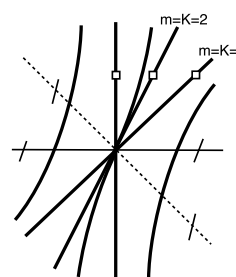
$$ii) u=y-t \rightarrow u' = \frac{u^2}{t^2} + 1 - 1 = \frac{u^2}{t^2} \rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1}{t} - C \rightarrow y = t + \frac{t}{1-Ct} \rightarrow y = \frac{2t-Ct^2}{1-Ct}$$

$f$  y  $f_y = 2(y-t)/t^2$  continuas en un entorno de cada uno de los dos puntos  $\Rightarrow$  **solución única** para ii) y iii). Son, respectivamente, las rectas  $y=2t$  e  $y=t$ .

[Ojo con las soluciones mentirosas; imponiendo iii):  $2 = \frac{4-4C}{1-2C} \rightarrow 2=4$ ;  $y=t$  se ha perdido].

El TEyU no dice nada para i), pero aplicándolo a  $\frac{dt}{dy} = \frac{t^2}{(y-t)^2+t^2}$ , deducimos que por  $(0, 2)$  pasa la única curva integral vertical  $t \equiv 0 \Rightarrow$  **no existe solución**  $y(t)$  con  $y(0)=2$ .

[Según la solución general, todas cumplen  $y(0)=0$ , pero se podía haber perdido alguna].



**1.9**  $y' = \frac{3}{x}(y-y^2/3) \xrightarrow{z=y^{1/3}} z' = \frac{z-1}{x} \rightarrow z = 1+Cx \rightarrow y = (1+Cx)^3$  solución (e  $y \equiv 0$  perdida).

Para i) el TEyU asegura solución única (es la  $y \equiv 1$ ).

Para ii) los TEyU no dicen nada. Se ve que se cumple  $y(0) = 1$  para todo  $C$ . Infinitas soluciones.

Para iii) hay solución seguro, pero no sabemos si es única. De la solución general sale  $y=(1-x)^3$ , pero lo cumple también la  $y \equiv 0$  perdida. O la unión de esta y un trozo de parábola cúbica. Infinitas soluciones.

**1.10**  $y' = -[y+t]^2 = K \rightarrow y = -t \pm \sqrt{-K}$ ; o mejor,  $y = -t + b \rightarrow K = -b^2$ .

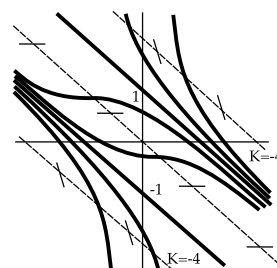
$$y = -t \pm 1 \text{ rectas solución. } y'' = -2[y+t][1-(y+t)^2] = 0$$

↑ inflexión      rectas solución

$$y_p = 1-t \xrightarrow{z=y-y_p} z' = -2z-z^2 \xrightarrow{u=1/z} z' = 2z+1, z = Ce^{2t} - \frac{1}{2}, \quad y = \frac{Ce^{2t}+1}{Ce^{2t}-1} - t$$

$$y+t=z \rightarrow z' = 1-z^2, \int \frac{2dz}{z^2-1} = \log \frac{z-1}{z+1} = K-2t, \frac{z-1}{z+1} = Ke^{-2t}, \quad y = \frac{1+Ke^{-2t}}{1-Ke^{-2t}} - t$$

$f$  y  $f_y$  continuas en  $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$  solución única para cualquier dato inicial. Pero una solución general 'mentirosa' puede no recogerla: i)  $\frac{C+1}{C-1} = 1$  imposible (es  $y=1-t$  que se ha perdido). ii)  $\frac{C+1}{C-1} = -1 \rightarrow C=0 \rightarrow y=-1-t$ .



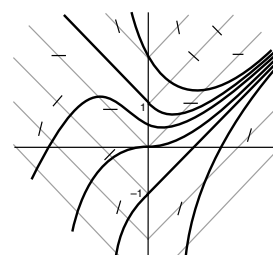
**1.11**  $y' = |t|-y$  Única solución para cualquier dato inicial. Isoclinas:  $y = |t|-K$ .

Dos semirrectas solución:  $y = t-1$  para  $t \geq 0$  e  $y = 1-t$  para  $t \leq 0$ .

En el dibujo se ve que  $y = 1-t$ , si  $t \leq 0$ .

Para  $t \geq 0$ :  $y = t-1 + Ce^{-t} \xrightarrow{y(0)=1} C = 2$ .

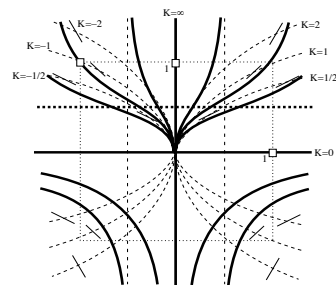
$$\text{La solución pedida es, pues, } y = \begin{cases} 1-t, & t \leq 0 \\ t-1+2e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$$



**1.12**  $y' = \frac{y^2}{t}$  Separable,  $-\frac{y'}{y^2} = -\frac{1}{t} \rightarrow y = \frac{1}{C - \log|t|}$  (todas con asíntotas).

El TEyU asegura que sólo una cumple i) y ii) ( $y = \frac{1}{1 - \log|t|}$  e  $y = 0$ ).

Para  $(0, 1)$  el TEyU no dice en principio nada para nuestra ecuación, pero como  $\frac{dt}{dy} = \frac{t}{y^2}$  tiene solución única  $t(y)$  en ese punto (la  $t \equiv 0$ ), para  $y(0) = 1$  no existe solución  $y(t)$ , pues ya pasa la única curva integral vertical  $t \equiv 0$ .



**1.13** a)  $y' = \cos(x-y)$ ,  $y = x - 2 \arctan \frac{1}{C-x}$ .

Solución única por cada punto.

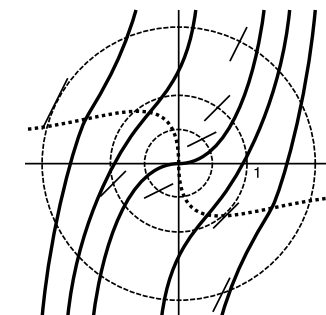
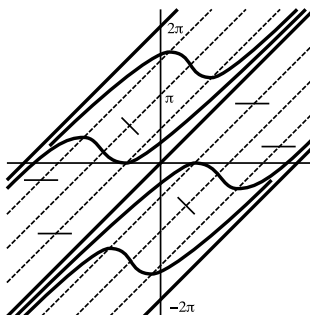
Isoclinas:  $f(x, x+b) = \cos b$ .

b)  $y' = x^2 + y^2$ , no resoluble.

Solución única en cada punto.

Isoclinas:  $x^2 + y^2 = K$  (circunferencias).

Inflexión:  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4y^4}}{2y} \sim -y^3 + \dots$  ( $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$ )

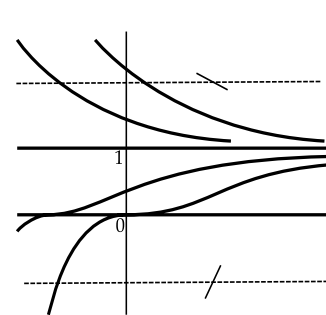
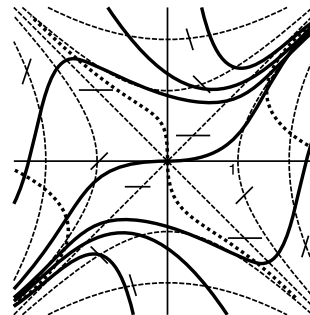


c)  $y' = x^2 - y^2$ , no resoluble.

Solución única en cada punto.

Isoclinas:  $x^2 - y^2 = K$  (hipérbolas).

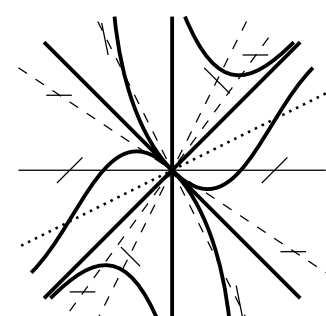
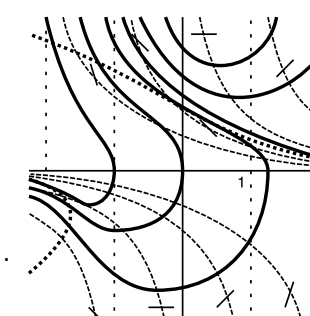
Inflexión:  $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y^4}}{2y} \sim \frac{1}{y} + y^3 + \dots$



d)  $y' = y^{2/3} - y$ ,  $y = [1 - Ce^{-x/3}]^3$ .

Solución única por  $(a, b)$ ,  $b \neq 0$ . Por  $(a, 0)$

pasan 2 al menos:  $y \equiv 0$  e  $y = [1 - e^{-(a-x)/3}]^3$ .

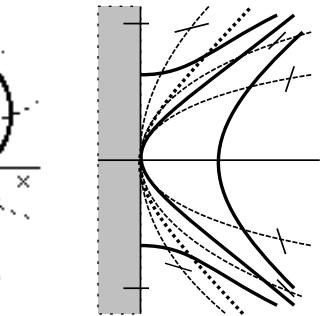
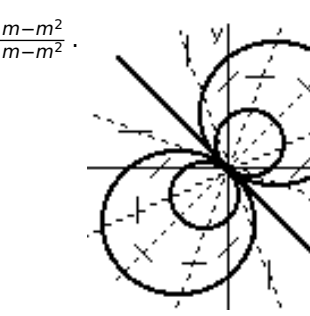


e)  $y' = x - \frac{1}{y}$ , no resoluble.

Única curva integral por cada punto.

Sobre  $y=0$  no existe solución.

Isoclinas:  $y = \frac{1}{x-K}$ . Inflexión:  $x = \frac{1}{y} - y^2$ .

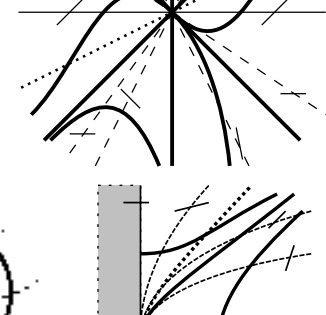
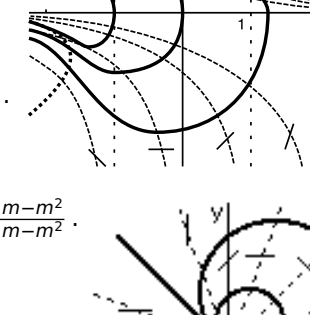


f)  $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}$  Homogénea o Riccati:  $y = x \frac{Cx^2-1}{Cx^2+1}$ .

Solución única si  $x \neq 0$ . Única curva en  $\mathbf{R}^2 - (0, 0)$ .

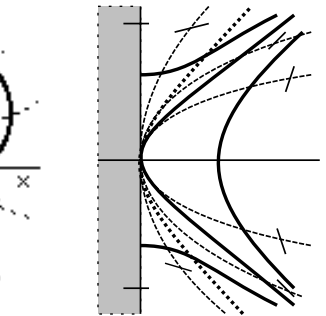
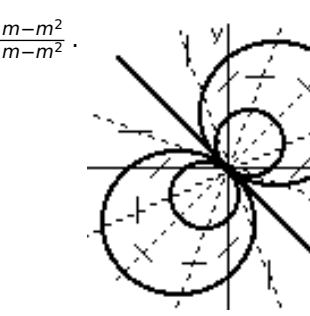
Por  $(0, 0)$  infinitas soluciones.

Rectas solución:  $y = \pm x$ . Inflexión:  $y = \frac{x}{2}$ .



g)  $y' = \frac{x^2+2xy-y^2}{x^2-2xy-y^2}$ ,  $y+x = C(x^2+y^2)$ .  $f(x, mx) = \frac{1+2m-m^2}{1-2m-m^2}$ .

Única solución si  $m \neq -1 \pm \sqrt{2}$ . Única curva en  $\mathbf{R}^2 - (0, 0)$ . Por  $(0, 0)$  infinitas soluciones.

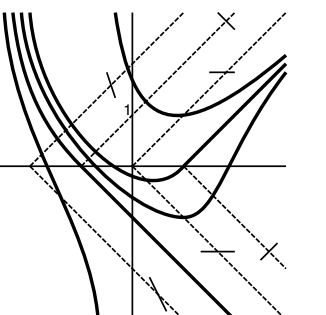
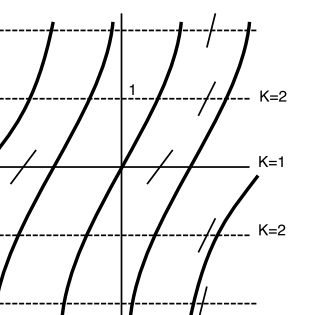


h)  $y' = \frac{\sqrt{x}}{y}$ ,  $y^2 = \frac{4}{3}x^{3/2} + C$ .

Solución única por  $(a, b)$ ,  $a \geq 0, b \neq 0$ .

Por  $(a, 0)$ ,  $a \geq 0$  no solución, única curva integral.

Isoclinas:  $y = \sqrt{x}/K$ . Inflexión  $y^2 = 2x^{3/2}$ .



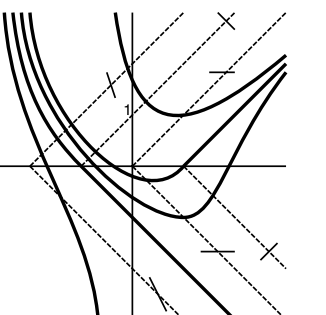
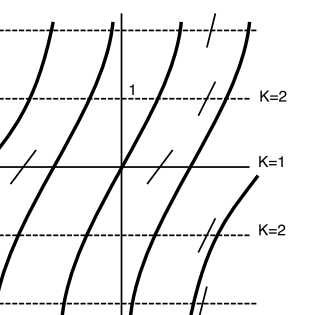
i)  $y' = 1 + y^{2/3}$ ,  $y^{1/3} - \arctan y^{1/3} = \frac{x}{3} + C$ .

Solución única por cada punto.

( $f$  continua en  $\mathbf{R}^2 \Rightarrow \exists$  solución;

$1/f$  y  $[1/f]_t$  continuas  $\Rightarrow$  es única).

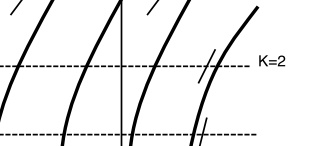
Isoclinas:  $y = b \rightarrow y' = 1 + b^{2/3}$ .



j)  $y' = x - |y|$ ,  $y = \begin{cases} Ce^x - x - 1, & y \leq 0 \\ Ce^{-x} + x - 1, & y \geq 0 \end{cases}$

Isoclinas:  $x = |y| + K$ .

$|x - |y| - (x - |y^*|)| \leq |y - y^*|$  en  $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$  solución única para cualquier dato inicial.



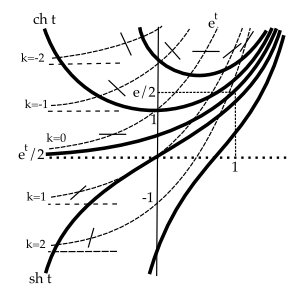
**1.14**  $y' = e^t - y \rightarrow y = Ce^{-t} + \frac{1}{2}e^t \rightarrow y = \frac{1}{2}[e^t - e^{-t}] = \text{sh } t$ .

En una lineal (con coeficientes continuos  $\forall t$ ) la estabilidad de todas las soluciones es la misma y la da  $e^{\int a} = e^{-t} \rightarrow 0$ . La ecuación es AE.

Isoclinas:  $y = e^t - K$ . Inflexión:  $y'' = e^t - y' = y \rightarrow y = 0$ .

En la solución general vemos soluciones importantes:

$y = \frac{1}{2}e^t$  (única que  $\rightarrow 0$ ).  $y = \text{sh } t$  (única impar).  $y = \text{ch } t$  (única par).



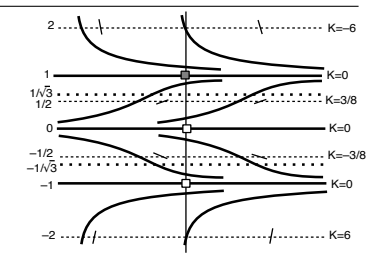
**1.15**  $y' = y - y^3$ . Autónoma (y, por tanto, separable), o también Bernoulli:

$z = y^{-2} \rightarrow z' = -2z + 2 \rightarrow z = Ce^{-2t} + 1 \rightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + Ce^{-2t}}}$ .

O bien:  $t + C = \int \frac{dy}{y(1+y)(1-y)} = \frac{1}{2} \log \frac{y^2}{1-y^2} \rightarrow y^2 = \frac{Ce^{2t}}{1 + Ce^{2t}}$  (casi igual).

Solución única para cada dato (en concreto,  $y = 0$  e  $y = -1$ ).

El dibujo (por ser autónoma) prueba que  $y = 1$  es asintóticamente estable.



**1.16** a)  $y' = \frac{y}{3t} + 1 \rightarrow y = Ct^{1/3} + t^{1/3} \int t^{-1/3} dt = Ct^{1/3} + \frac{3}{2}t$ .

[U homogénea:  $tz' + z = \frac{z}{3} + 1, \int \frac{3dz}{3-2z} = -\frac{3}{2} \ln(3-2z) = \ln t + C, 3-2z = Ct^{-2/3} \dots$ ].

Isoclinas  $y = mt \rightarrow K = \frac{m}{3} + 1$ .  $m = -3, -1, 0, 1, 3$ .  $\frac{m}{3} + 1 = m \rightarrow m = \frac{3}{2}$  solución.

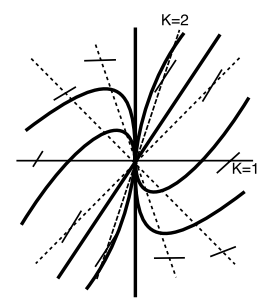
Si  $t = 0, K = \infty$  (curva integral vertical). Decrecen entre  $y = -3t$  y  $t = 0$ .

$y'' = \frac{y'}{3t} - \frac{y}{3t^2} = \frac{3t-2y}{9t^2} \rightarrow$  no hay puntos de inflexión ( $y = \frac{3t}{2}$  solución).

b) Lineal con coeficientes continuos en  $[1, \infty)$ :  $e^{\int_1^t a} = t^b$  da la estabilidad.

Si  $b < 0$ , como  $t^b \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ , la ecuación es **AE**. Si  $b = 0$  es **EnoA** ( $t^0 = 1 \neq 0$ ).

Y si  $b > 0$  (por ejemplo el caso de arriba) es **I** por no estar  $t^b$  acotada.



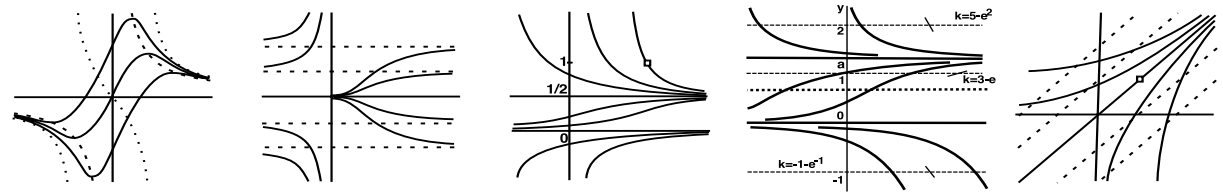
**1.17** a)  $y' = 1 - ty$  lineal.  $e^{-\int t dt} = e^{-t^2/2} \rightarrow 0 \Rightarrow$  todas son AE (y todas ellas  $y = \frac{C + \int e^{t^2/2} dt}{e^{t^2/2}} \rightarrow 0$ ).

b)  $y' = \frac{y}{t^2}$  lineal.  $e^{\int_1^t ds/s^2} = e^{1-1/t} \rightarrow e$  (y acotado por e)  $\Rightarrow$  todas son E no A.

c)  $y' = y^2 - 2y^3$  autónoma (el dibujo prueba). Todas las próximas tienden a  $y = 1/2 \Rightarrow$  AE. (La solución  $t + \frac{1}{y} - 2 \log |\frac{y}{1-2y}| = C$  sirve para poco).

d)  $y' = 1 + 2y - e^y$  autónoma.  $f$  sólo se anula 2 veces, si  $y = 0$  y para un  $a \in (0, 2)$ . La de  $y(1) = 1$  es AE pues ella y las que parten cerca tienden hacia la solución constante  $y \equiv a$ .

e)  $y' = e^t - y$  separable:  $\int e^y dy = \int e^t dt + C \rightarrow y = \log(C + e^t)$  [mucho más largo  $z = t - y \dots$ ]  $y(1) = 1 \rightarrow y = t$ . Las próximas definidas en  $[1, \infty)$  y  $|\log(C + e^t) - t| = |\log \frac{C + e^t}{e^t}| \rightarrow 0 \Rightarrow$  AE.

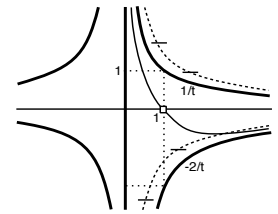


**1.18**  $y' = y^2 - \frac{2}{t^2}$ . Única curva integral por cada punto. Por el origen,  $t = 0$ .

Probando  $y = \frac{A}{t}$ , se obtiene que  $y = \frac{1}{t}$  e  $y = -\frac{2}{t}$  son soluciones.

La solución con  $y(1) = 0$ , encerrada entre ellas y  $t = 0$ , está definida en  $(0, \infty)$ . Como las próximas también están definidas en  $[1, \infty)$  y todas  $\rightarrow 0$ , es AE.

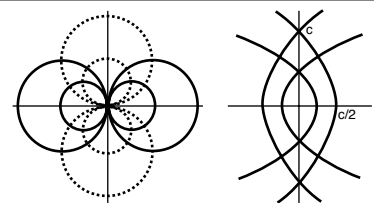
[Podemos hallar solución de la Riccati  $y = \frac{C+2t^3}{t(C-t^3)}$  y comprobarlo].



**1.19**  $x^2 + y^2 = 2Cx$ ,  $x + yy' = C \Rightarrow y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \Rightarrow y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = Cy$ .

$y^2 + 2Cx = C^2$ ,  $yy' + C = 0 \Rightarrow [e] y^2 y'^2 + 2xyy' - y^2 = 0$ ,  $yy' = -x \pm \sqrt{y^2 + x^2}$   
 $\Rightarrow$  ortogonales:  $[o] y' = \frac{y}{x \pm \sqrt{y^2 + x^2}} \xrightarrow{z=y/x} xz' = \frac{\pm z \sqrt{1+z^2}}{1 \mp \sqrt{1+z^2}}$

$\int (\pm \frac{1}{z \sqrt{1+z^2}} - \frac{1}{2}) dz = -\log(1 \pm \sqrt{1+z^2}) = \log x + C \rightarrow y^2 + 2Cx = C^2$



(parábolas iniciales; de hecho, desarrollando [o] se llega a [e]).

## Soluciones problemas 2. Ecuaciones I (C). 08/09

**2.1** a)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ ,  $\lambda = -1, -3$ ;  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{P} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} + e^{-3t} \\ e^{-t} - e^{-3t} \end{pmatrix}$

Derivando:  $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ ,  $x = y' + 2y$ ,  $y'' + 4y' + 3y = 0$ ,  $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}$ ,  $y(0)=0, y'(0)=2 \rightarrow y = e^{-t} - e^{-3t}$   
 $\searrow x = -e^{-t} + 3e^{-3t} + 2e^{-t} - 2e^{-3t}$ , como arriba.

Laplace:  $\begin{cases} sX - 2 = -2X + Y \\ sY = X - 2Y \end{cases}$ ,  $X = (s+2)Y$ ,  $[(s+2)^2 - 1]Y = 1$ ,  $Y = \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \nearrow \dots$

b)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ ,  $\lambda = 1$  doble;  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{w} = \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$$e^{Jt} = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \mathbf{P} e^{Jt} \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{P} e^{Jt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(1+2t) \\ te^t \end{pmatrix}$$

Derivando:  $\begin{cases} x' = 3x - 4y \\ y' = x - y \end{cases}$ ,  $x = y' + y$ ,  $y'' - 2y' + y = 0$ ,  $y = (c_1 + c_2 t)e^t$ ,  $y(0)=0, y'(0)=1 \rightarrow y = te^t$   
 $\searrow x = (t+1)e^t + te^t$ , como antes.

Laplace:  $\begin{cases} sX - 1 = 3X - 4Y \\ sY = X - Y \end{cases}$ ,  $X = (s+1)Y$ ,  $[(s-3)(s+1)+4]Y = 1$ ,  $Y = \frac{1}{(s-1)^2} \nearrow \dots$

c)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$ ;  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\sqrt{2}i & \sqrt{2}i \end{pmatrix} e^{-t} \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{2}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ \sqrt{2} & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{2}t - \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t \\ 2 \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t \end{pmatrix}$

Derivando:  $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ ,  $y = -x' - x$ ,  $x'' + 2x' + 3x = 0$ ,  $x = (c_1 \cos \sqrt{2}t + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{2}t)e^{-t}$ ,  $x(0)=1, x'(0)=-3$   
 $\rightarrow x = e^{-t}(\cos \sqrt{2}t - \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t) \rightarrow y = e^{-t}(2 \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2} \operatorname{sen} \sqrt{2}t)$

Laplace:  $\begin{cases} sX - 1 = -X - Y \\ sY - 2 = 2X - Y \end{cases}$ ,  $Y = 1 - (s+1)X$ ,  $[(s+1)^2 + 2]X = s - 1$ ,  $X = \frac{(s+1)-2}{(s+1)^2 + (\sqrt{2})^2} \searrow \dots$

**2.2** a)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x - 2y - t \\ y' = 2x - 3y - t \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ;  $y = \frac{x - x' - t}{2}$ ,  $\begin{cases} x'' + 2x' + x = -t - 1 \\ x(0) = 1, x'(0) = 2 - 3 = -1 \end{cases}$ ,  $\boxed{x = 1 - t}$ ,  $\boxed{y = 1 - t}$ .

$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = -1$ ;  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $e^{Jt} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} e^t - te^t - 1 \\ e^t - te^t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - t \\ 1 - t \end{pmatrix}$

$\begin{cases} sX - 1 = X - 2Y - \frac{1}{s^2} \\ sY - 1 = 2X - 3Y - \frac{1}{s^2} \end{cases}$ ,  $X = \frac{(s+3)Y}{2} + \frac{1-s^2}{2s^2}$ ,  $[(s-1)(s+3)+4]Y = \frac{(s+1)^2(s-1)}{s^2}$ ,  $Y = \frac{s-1}{s^2} \uparrow \dots$

b)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} y - 2 \\ y' = 2x - y \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ;  $y = x' + 2$ ,  $\begin{cases} x'' + x' - 2x = -2 \\ x(0) = 0, x'(0) = 2 \end{cases}$ ,  $\boxed{x = 1 - e^{-2t}}$ ,  $\boxed{y = 2 + 2e^{-2t}}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = -2$ ;  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \frac{1}{3} \mathbf{P} [e^{Jt} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} - \int_0^t e^{J(t-s)} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} ds] = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2t} \\ 2 + 2e^{-2t} \end{pmatrix}$

Para no integrar buscamos  $\mathbf{x}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  (no siempre hay):  $\begin{cases} 0 = b - 2 \\ 0 = 2a - b \end{cases} \rightarrow \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \nearrow \text{d.i.}$

$\begin{cases} sX = Y - \frac{2}{s} \\ sY - 4 = 2X - Y \end{cases} \rightarrow Y = sX + \frac{2}{s} \downarrow$   
 $(s+1)(sX + \frac{2}{s}) - 4 = 2X \rightarrow X = \frac{2(s-1)}{s(s+2)(s-1)} = \frac{2}{s(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \uparrow \dots$

c)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3x + 2y \\ y' = -6x - 4y + t \cos t \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ;  $y = \frac{x' - 3x}{2}$ ,  $\begin{cases} x'' + x' = t \cos t \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$ ,  $\begin{matrix} \boxed{(2-t) \cos t + (1+t) \operatorname{sen} t - 2} \\ \boxed{(2t-3) \cos t - (t+2) \operatorname{sen} t + 3} \end{matrix} \downarrow$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ ,  $\lambda = 0, -1$ ;  $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}^{-1}$ ,  $e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{P} \int_0^t \begin{pmatrix} s \cos s \\ -2e^{-t} s e^s \cos s \end{pmatrix} ds \uparrow$

$\begin{cases} sX = 3X + 2Y \\ sY = -6X - 4Y + \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2} \end{cases}$ ,  $X = -\frac{2}{s} + \frac{2s}{s^2+1} + \frac{2s+2}{(s^2+1)^2} \nearrow [L(t \operatorname{sen} t) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}, L^{-1}(\frac{1}{(s^2+1)^2}) = \operatorname{sen} t * \operatorname{sen} t]$

d)  $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2x - y \\ y' = x + |2-t| \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{cases} sX = 2X - Y \\ sY + 1 = X + \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2} e^{-2s} \end{cases}$  [pues  $|2-t| = 2-t + 2u_2(t)(t-2)$ ],

$X = \frac{1}{s^2} + e^{-2s} [-\frac{4}{s} - \frac{2}{s^2} + \frac{4}{s-1} - \frac{2}{(s-1)^2}]$ ,  $x = t + u_2(t)[-2t + (8-t)e^{t-2}] = \begin{cases} t, t \leq 2 \\ -t + (8-2t)e^{t-2}, t \geq 2 \end{cases} \rightarrow$

$y = \begin{cases} 2t-1, t \leq 2 \\ 1-2t + (10-2t)e^{t-2}, t \geq 2 \end{cases}$ . O bien,  $x'' - 2x' + x = -|2-t|$ ;  $t \leq 2$ :  $\begin{cases} x'' - 2x' + x = t-2 \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$ ,  $x = t$

$\rightarrow t \geq 2$ :  $\begin{cases} x'' - 2x' + x = 2-t \\ x(2) = 2, x'(2) = 1 \end{cases}$ ,  $x = -t + (8-2t)e^{t-2} \dots$

**2.3** a)  $x'' - x = e^{2t}$ ,  $\lambda = \pm 1$ ,  $x_p = Ae^{2t}$ ,  $4A - A = 1 \rightarrow x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$

b)  $x'' + x = te^t \cos t$ ,  $\lambda = \pm i$ ,  $x_p = (At+B)e^t c + (Ct+D)e^t s$ ,  $x_p'' = 2(A+C+D+Ct)e^t c + 2(-A+C-B-At)e^t s$   
 $\rightarrow x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{25} [(5t-2) \cos t + (10t-14) \sin t] e^t$

c)  $x''' + 2x'' + 5x' = 5t$ ,  $\lambda = 0, -1 \pm 2i$ ,  $x_p = (At+B)t \rightarrow x = c_1 + (c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t)e^{-t} + \frac{t^2}{2} - \frac{2t}{5}$

d)  $x^{IV} + 4x = te^t \cos t$ ,  $\lambda^4 = -1 \rightarrow \lambda = \pm 1 \pm i$ ,  $x_p = (At^2 + Bt)e^t c + (Ct^2 + Dt)e^t s$ ,  
 $\rightarrow x = (c_1 \cos t + c_2 \sin t)e^t + (c_3 \cos t + c_4 \sin t)e^{-t} + \frac{t}{32} [(3-t) \cos t + t \sin t] e^t$ ,

e)  $x'' + x = \cos^3 t$ ,  $\begin{vmatrix} c & s \\ -s & c \end{vmatrix} = 1$ ,  $x_p = s \int c^4 - c \int s c^3 \rightarrow x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{3t}{8} \sin t - \frac{1}{8} \cos^3 t$   
 O bien,  $\cos^3 t = \frac{1}{4}(3 \cos t + \cos 3t) \rightarrow x_p = t(A \cos t + B \sin t) + C \cos 3t \rightarrow x_p = \frac{3t}{8} \sin t - \frac{1}{32} \cos 3t$

f)  $t^2 x'' - 3tx' + 3x = 9 \log t$ ,  $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \rightarrow x = c_1 t + c_2 t^3 + x_p$ . Con variación de constantes:

$|W[t]| = 2t^3$ ;  $x_p = t^3 \int \frac{9 \log t dt}{2t^4} - t \int \frac{9 \log t dt}{2t^2} = 3 \log t + 4 \rightarrow x = c_1 t + c_2 t^3 + 3 \log t + 4$ .

O bien,  $x_p = As + B = A \log t + B$ ,  $x_p' = \frac{A}{t}$ ,  $x_p'' = -\frac{A}{t^2} \rightarrow -A - 3A + 3A \log t + 3B = 9 \log t \rightarrow x_p = 3 \log t + 4$ .

g)  $(t+1)x'' - x' = (t+1)^2$ ,  $\dot{x} = v$ ,  $v' = \frac{v}{t+1} + t + 1$ ,  $v = c_1(t+1) + t^2 + t$ ,  $x = c_1(t^2 + 2t) + c_2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}$

O bien,  $t+1 = s$ ,  $sx'' - x' = s^2$  (Euler),  $x_p = As^3$ ,  $x = k_1 s^2 + k_2 + \frac{s^3}{3} = k_1(t+1)^2 + k_2 + \frac{(t+1)^3}{3}$

h)  $t^2 x'' - t(t+2)x' + (t+2)x = t^3$ ,  $x_1 = t$ ,  $x = t \int u \rightarrow u' = u + 1 \rightarrow u = Ce^t - 1 \rightarrow x = Kt + Cte^t - t^2$

O bien,  $x_2 = t \int \frac{e^{\int \frac{t+2}{t^2}}}{t^2} = te^t$ ,  $|W| = t^2 e^t$ ,  $x_p = te^t \int e^{-t} - t \int 1 = -t^2 - t'$

**2.4** i)  $t^2 x'' + 2tx' = t^2$ .  $\lambda(\lambda-1) + 2\lambda = 0 \rightarrow x = c_1 + c_2 t^{-1} + x_p$  solución de la no homogénea.

$\begin{vmatrix} 1 & t^{-1} \\ 0 & -t^{-2} \end{vmatrix} = -t^{-2}$ ,  $x_p = \frac{1}{t} \int \frac{1 \cdot 1}{-t^{-2}} - 1 \int \frac{1/t-1}{-t^{-2}} = \frac{t^2}{6}$ . O mejor,  $x_p = At^2$  ( $Ae^{2s}$ )  $\rightarrow 2A + 4A = 1$ .

ii)  $ty' + 2y = t \rightarrow y = \frac{t}{3} + \frac{C}{t^2} \rightarrow x = \frac{t^2}{6} - \frac{C}{t} + K$ , como antes (con otro nombre de las constantes).

iii)  $x = \frac{y}{t}$ ,  $x' = \frac{y'}{t} - \frac{y}{t^2}$ ,  $x'' = \frac{y''}{t} - \frac{2y'}{t^2} + \frac{2y}{t^3} \rightarrow y'' = t \rightarrow y' = \frac{t^2}{2} + k_1 \rightarrow y = \frac{t^3}{6} + k_1 t + k_2 = tx$ .

Si  $t_0 \neq 0$  solución única (TEyU).  $x(0) = a, x'(0) = b \rightarrow$  Si  $b=0$ , para cada  $a$ , sólo vale  $x = \frac{t^2}{6} + a$  (solución única).  
 Si  $b \neq 0$ , ninguna solución lo cumple, sea quien sea el  $a$ .  
 (debe ser  $C=0$ )

**2.5** a)  $x'' + x = \frac{2}{\cos^3 t}$ ,  $\lambda = \pm i$ ,  $\begin{vmatrix} c & s \\ -s & c \end{vmatrix} = 1$ ,  $x_p = s \int \frac{2}{c^2} - c \int \frac{s}{c^3} = \frac{1}{c} - 2c \rightarrow x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{\cos t}$

$x(0) = x'(0) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{\cos t} - \cos t = \frac{\sin^2 t}{\cos t}$

b)  $x'' + x' = f(t) = \begin{cases} t+1, & t \leq 1 \\ 3-t, & t \geq 1 \end{cases} = t+1 + u_1[-2(t-1)]$ ,  $(s^2 + s)X + s - 0 + 1 = \frac{s+1}{s^2} - \frac{2}{s^2} e^{-s}$ ,

$X = \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s} - 2e^{-s} [\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1}]$ ,  $x = \frac{t^2}{2} - 1 - 2u_1 [1 - (t-1) + \frac{(t-1)^2}{2} - e^{1-t}] = \begin{cases} \frac{t^2}{2} - 1, & t \leq 1 \\ 4t - 6 - \frac{t^2}{2} + 2e^{1-t}, & t \geq 1 \end{cases}$

O bien:  $t \leq 1$ ,  $x'' + x' = t+1$ ,  $x = c_1 + c_2 e^{-t} + \frac{t^2}{2}$ ,  $x(0) = -1, x'(0) = 0 \rightarrow x = \frac{t^2}{2} - 1$  que cumple  $x(1) = -\frac{1}{2}$ ,  $x'(1) = 1$ .

Para  $t \geq 1$ :  $x'' + x' = 3-t$ ,  $x = k_1 + k_2 e^{-t} + 4t - \frac{t^2}{2}$ , que con  $x(1) = -\frac{1}{2}$ ,  $x'(1) = 1$  lleva a lo de antes.

Otra forma:  $x' = v$ ,  $v' = -v + f(t)$ ,  $v = e^{-t} \int_0^t e^s f(s) ds$  si  $t \leq 1 \rightarrow e^{-t} \int_0^t e^s (1+s) ds = t \xrightarrow{x(0)=-1} x = \frac{t^2}{2} - 1$ .

Y si  $t \geq 1$ :  $v = e^{-t} [\int_0^1 e^s (1+s) ds + \int_1^t e^s (3-s) ds] = 4 - t - 2e^{1-t} \xrightarrow{x(1)=-1/2} x = 4t - 6 - \frac{t^2}{2} + 2e^{1-t}$ .

c)  $x''' + 5x'' + 8x' + 4x = -8e^{-2t}$ ,  $\lambda = -1, \lambda = -2$  doble,  $x_p = At^2 e^{-2t}$ ,  $A = 4$ ,

$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + c_3 t e^{-2t} + 4t^2 e^{-2t}$ ,  $x(0) = 1, x'(0) = -1, x''(0) = 9 \rightarrow x = e^{-t} + 4t^2 e^{-2t}$

O Laplace:  $(s^3 + s^2 + 8s + 4)X = s^2 + 4s + 12 - \frac{8}{s+2}$ ,  $X = \frac{s^3 + 6s^2 + 20s + 16}{[s+1][s+2]^3} = \frac{1}{s+1} + \frac{8}{[s+2]^3}$

d)  $x'' + 2tx' = 2t$ ,  $v' = -2tv + 2t$ ,  $v_p = 1$  a ojo  $v = c_1 e^{-t^2} + 1$ ,  $x = c_1 \int_0^t e^{-s^2} ds + c_2 + t$ ,  $x(1) = x'(1) = 1 \rightarrow x = t$

e)  $t^2 x'' + 4tx' + 2x = e^t$ ,  $x = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2}{t^2} + x_p$ ,  $|W| = -t^{-4}$ ,  $x_p = -t^{-2} \int te^t + t^{-1} \int e^t = \frac{e^t}{t^2}$  d.i.  $x = \frac{e^t}{t^2} - \frac{e}{t}$

f)  $t^3 x''' + t^2 x'' - 2tx' + 2x = t^3$ ,  $t = e^s \rightarrow x''' - 2x'' - x' + 2x = e^{3s}$ ,  $\lambda = 1, 2, -1$ ,  $x_p = Ae^{3s}$ ,  $A = \frac{1}{8}$ ,

$x = c_1 t + c_2 t^2 + \frac{c_3}{t} + \frac{t^3}{8}$ ,  $x(1) = x'(1) = x''(1) = 1 \rightarrow x = \frac{1}{8}(t^3 + 6t + \frac{1}{t})$

2.6 a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \lambda = 1, 2, -1, \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$

b)  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \lambda = 2, \lambda = -1 \text{ doble (pero con 2 v. propios l.i.)}, \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$

c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \lambda = -1 \rightarrow \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda = 2 \text{ doble} \rightarrow \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ \u00fanico vector propio.}$

Probando  $\mathbf{x} = (t\mathbf{v} + \mathbf{w})e^{2t}$  en  $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}: (2t\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{w})e^{2t} = (t\mathbf{Av} + \mathbf{Aw})e^{2t}, \begin{cases} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{w} = \mathbf{v} \end{cases} \rightarrow$   
 $\mathbf{v} = \mathbf{u}_2, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ por ejemplo} \rightarrow \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t \right] e^{2t}.$

2.7 a)  $\begin{cases} x' = -2z \\ y' = x \\ z' = x - 2z \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \lambda = 0, -1 \pm i, \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1+i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t+it} + c_3 \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-t-it}$

$\xrightarrow{\text{d.i.}} c_1 = 0, c_2 = -\frac{i}{2}, c_3 = \frac{i}{2}, \mathbf{x} = \frac{1}{2} e^{-t} \begin{pmatrix} [e^{it} + e^{-it}] + i[e^{it} - e^{-it}] \\ -i[e^{it} - e^{-it}] \\ e^{it} + e^{-it} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t - \text{sent} t \\ \text{sent} t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$x = z' + 2z$  a la 1<sup>a</sup>:  $\begin{cases} z'' + 2z' + 2z = 0 \\ z(0) = 1, z'(0) = -1 \end{cases}, \begin{cases} z = e^{-t} \cos t \\ x = e^{-t}(\cos t - \text{sent} t) \end{cases}, \begin{cases} y' = e^{-t}(\cos t - \text{sent} t) \\ y(0) = 0 \end{cases}, y = e^{-t} \text{sent} t.$

$\begin{cases} sX - 1 = -2Z \\ sY = X \\ sZ - 1 = X - 2Z \end{cases}, X = (s+2)Z - 1, Z = \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1}, X = \frac{s+1-1}{(s+1)^2 + 1}, Y = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \uparrow$

Un autovalor simple con  $\text{Re}\lambda = 0$  y dos con  $\text{Re}\lambda < 0 \Rightarrow$  **estabilidad no asint\u00f3tica.**

b)  $\begin{cases} x' = x - 4y + 2z \\ y' = x - 3y + z \\ z' = x - 2y + 1 \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)^2 \lambda; \lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \lambda = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

**EnoA**

$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \mathbf{P}e^{\mathbf{J}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{P} \int_0^t \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{s-t} \\ 1 \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 2e^{-t} + 2t \\ e^{-t} + t \\ 1 + t \end{pmatrix}$

$z'' = 2x - y = 1 - z', \begin{cases} z = c_1 + c_2 e^{-t} + 1 \\ z(0) = z'(0) = 1 \end{cases}, z = 1 + t, x = 2y, \begin{cases} y' + y = t + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}, y = t + e^{-t}, x = 2t + 2e^{-t}.$

$\begin{cases} sX - 2 = X - 4Y + 2Z \\ sY - 1 = X - 3Y + Z \\ sZ - 1 = X - 2Y + \frac{1}{s} \end{cases}, X = (s+3)Y - Z - 1, \begin{cases} (s+1)Y = Z + 1 \\ (s+1)Z = (s+1)Y + \frac{1}{s} \end{cases}, Y = \frac{s^2 + s + 1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+1}, Z = \frac{(s+1)^2}{s^2(s+1)}, x = z' + 2y - 1$

c)  $\begin{cases} x' = y \\ y' = 4x + z \\ z' = -z + 4e^{-2t} \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, e^{\mathbf{J}t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$

$\mathbf{x} = \frac{1}{12} \mathbf{P} \begin{pmatrix} -16e^{-t} \\ -3e^{-2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \mathbf{P} \int_0^t \begin{pmatrix} 4e^{t-s} \\ 3e^{-2t} \\ e^{2t-4s} \end{pmatrix} ds = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1+t \\ -1-2t \\ -4 \end{pmatrix}$  (el camino m\u00e1s largo)  $\exists \lambda = 2 \Rightarrow$  sistema **inestable** (que esta  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$  no importa).

3<sup>a</sup> desacoplada:  $\begin{cases} z = Ce^{-t} - 4e^{-2t} \\ z(0) = -4 \end{cases}, z = -4e^{-2t}, \begin{cases} x'' - 4x = -4e^{-2t} \\ x(0) = 1, x'(0) = -1 \end{cases}, x = (1+t)e^{-2t}, y = x' = (-1-2t)e^{-2t}.$

$\begin{cases} sX - 1 = Y \\ sY + 1 = 4X + Z \\ sZ + 4 = -Z + \frac{4}{s+2} \end{cases}, Z = \frac{-4s-4}{(s+1)(s+2)} = \frac{-4}{s+2}, X = \frac{s+3}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}, y = x' \uparrow$

d)  $\begin{cases} x' = y - 2z \\ y' = -z \\ z' = 4x - 5z \end{cases}, \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 0 & -\lambda & -1 \\ 4 & 0 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+2)^2(\lambda+1). \text{ Rango}(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = 2. \text{ Mejor sin matrices.}$

**AE**

$z'' = 4y - 8z - 5z', \begin{cases} z''' + 5z'' + 8z' + 4z = 0 \\ z(0) = 1, z'(0) = -5, z''(0) = 17 \end{cases}, z = e^{-t} - 4te^{-2t}, y = \frac{z'' + 5z' + 8z}{4} = \frac{e^{-t} - (1+2t)e^{-2t}}{4},$   
 $x = \frac{z' + 5z}{4} = \frac{e^{-t} - (1+3t)e^{-2t}}{4}.$

$\begin{cases} sX = Y - 2Z \\ sY = -Z \\ sZ - 1 = 4X - 5Z \end{cases}, \begin{cases} sX - (1+2s)Y = 0 \\ 4X + s(s+5)Y = -1 \end{cases}, (s^3 + 5s^2 + 8s + 4)Y = -s, Y = \frac{-s}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2},$   
 $y = e^{-t} - (1+2t)e^{-2t}, z = -y' = e^{-t} - 4te^{-2t}, x = \frac{z' + 5z}{4} = e^{-t} - (1+3t)e^{-2t}.$

**2.8**  $x'''' + x'' + 2x' + 8x = e^{at}$   $P(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 8$ . i)  $P(1) = 12$ ,  $\lambda = 1$  no autovalor  $\rightarrow x_p = Ae^t \rightarrow x_p = \frac{1}{12}e^t$

ii)  $P(-2) = 0$ ,  $\lambda = -2$  sí es autovalor  $\rightarrow x_p = Ate^{-2t} \rightarrow 10Ae^{-2t} = e^{-2t} \rightarrow x_p = \frac{1}{10}te^{-2t}$

La estabilidad sólo depende de la ecuación homogénea, en concreto de las raíces de  $P(\lambda)$ .

$\lambda = -2$  autovalor  $\rightarrow P(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - \lambda + 4) \rightarrow \lambda = -2$  y  $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2}$ .

Hay autovalores con  $\text{Re}\lambda > 0 \Rightarrow$  todas las soluciones son **inestables** (para cualquier  $a$ ).

[Lo confirma R-H:  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow 1 > 0$ ,  $-6 < 0 \Rightarrow$  **I**. El signo de los coeficientes no decía nada.]

**2.9**  $x'''' + 5x'' + 4x' + cx = t$  i) Si  $c \neq 0$ ,  $\lambda = 0$  no es autovalor,  $x_p = At + B \rightarrow x_p = \frac{t}{c} - \frac{4}{c^2}$ .

Si  $c = 0$ ,  $x_p = At^2 + Bt \rightarrow x_p = \frac{t^2}{8} - \frac{5t}{16}$ .

ii)  $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 10 = 0 \rightarrow \lambda = 1, -3 \pm i$ .  $x = c_1e^t + e^{-3t}[c_2 \cos t + c_3 \sin t] - \frac{t}{10} - \frac{1}{25}$ .

iii) Signo coeficientes: si  $c < 0$  inestable, si  $c = 0$  no es AE. Para saber más se necesita Routh-Hurwitz:

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ c & 4 & 5 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \rightarrow 5 > 0$ ,  $20 - c > 0$ ,  $c > 0 \rightarrow$  **AE**  $\Leftrightarrow 0 < c < 20$ , **I**  $\Leftrightarrow c < 0$  ó  $c > 20$ .

Si  $c = 0, 20$  es **EnoA**, pues los autovalores respectivos son  $\lambda = -4, -1, 0$  y  $\lambda = -5, \pm i$ .

**2.10**  $x^{IV} + ax'' + 4x = e^t$  i)  $x_p = Ae^t \rightarrow x_p = \frac{e^t}{a+5}$ , si  $a \neq -5$  ( $\lambda = 1$  no es autovalor).

Si  $a = -5$ :  $\lambda^2 = \frac{1}{2}[5 \pm \sqrt{25-16}] = 4, 1$ ;  $\lambda = -2, 2, -1, 1$ ;  $x_p = Ate^t \rightarrow x_p = -\frac{t}{6}e^t$

Solución general:  $x_p = c_1e^{-2t} + c_2e^{2t} + c_3e^{-t} + c_4e^t - \frac{t}{6}e^t$ .

ii) Es inestable, por ejemplo, si  $a = -5$  (pues hay  $\lambda > 0$ , o porque un coeficiente es negativo).

Nunca será asintóticamente estable, pues los coeficientes nunca son estrictamente positivos.

[ $\lambda^2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-16}}{2}$  dice que:  $a < -4$ , dos  $\lambda > 0$  y dos  $\lambda < 0$ ;  $a = -4$ ,  $\lambda = \pm\sqrt{2}$  dobles;  $-4 < a < 4$ , 2 complejos con  $\text{Re} < 0$ ;  $a = 4$ ,  $\lambda = \pm\sqrt{2}i$  dobles (todo inestable hasta ahora);  $a > 4$ , 4 imaginarios y simples (estabilidad no asintótica)].

**2.11**  $x^{IV} + 2x'''' + 6x'' + ax' + 5x = 4 \cos t$   $P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + a\lambda + 5 = 0 \rightarrow$   
si  $a < 0$  es **I**, si  $a = 0$  no es AE y si  $a > 0$  no sabemos.

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ a & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & a & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow 2 > 0$ ,  $a < 12$ ,  $12a - a^2 - 20 = -(a-2)(a-10) > 0$ ,  $5 > 0 \rightarrow$  **AE**  $\Leftrightarrow 2 < a < 10$   
 $a < 2$  ó  $a > 10 \Rightarrow$  **I**

Para  $a = 2, 10$  buscamos  $\lambda = qi \rightarrow q^4 - 2q^3i - 6q^2 + aqi + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} q^4 - 6q^2 + 5 = 0 \rightarrow q^2 = 1 \text{ ó } 5 \\ q(a - 2q^2) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = 2 \text{ ó } 10 \\ a = 2 \text{ ó } 10 \end{matrix}$

Por tanto, si  $a = 2$ :  $P(\lambda) = (\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 5) \rightarrow \lambda = \pm i$ ,  $\lambda = -1 \pm 2i \rightarrow$  **EnoA**.

Y si  $a = 10$ :  $P(\lambda) = (\lambda^2 + 5)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{5}i$ ,  $\lambda = -1$  doble  $\rightarrow$  **EnoA**.

Si  $a \neq 2$  ( $\lambda = \pm i$  no autovalor) hay  $x_p = A \cos t + B \sin t \rightarrow$

$[Ac + Bs] + 2[As - Bc] - 6[Ac + Bs] + a[Bc - As] + 5[Ac + Bs] = 4c \rightarrow \begin{matrix} (a-2)B = 4 \\ (2-a)A = 0 \end{matrix} \rightarrow x_p = \frac{4}{a-2} \sin t$

Si  $a = 10$ , con los autovalores de arriba y la  $x_p$ :  $x = (c_1 + c_2t)e^{-t} + c_3 \cos\sqrt{5}t + c_4 \sin\sqrt{5}t + \frac{1}{2} \sin t$ .

Para  $a = -14$ , una raíz clara de  $P(\lambda)$  es  $\lambda = 1$  (las demás no son calculables exactamente)  $\rightarrow$

$x = c_1e^t + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 - \frac{\sin t}{4}$ . Dos soluciones, por ejemplo, son  $-\frac{\sin t}{4}$  y  $e^t - \frac{\sin t}{4}$ .

Si  $a = 6$  no hay raíces sencillas de  $P(\lambda)$  y no tenemos soluciones de la homogénea, pero conocemos la  $x_p = \sin t$  y sabemos que la ecuación es AE, o sea, que las soluciones de la homogénea  $\rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . Por tanto cualquier solución para  $t$  gordo acabará siendo como  $\sin t$  (casi casi será periódica).

Como  $x_p = At \cos t + Bt \sin t$ , ninguna es periódica [la homogénea tenía infinitas soluciones periódicas ( $c_1 \cos t + c_2 \sin t$ ) y otras que no ( $c_3 e^{-t} \cos 2t + c_4 e^{-t} \sin 2t$ ), y debía tener infinitas o ninguna].



**2.12**  $x^{(n)} + 6x' + 20x = e^t$  i)  $\lambda^3 + 6\lambda + 20 = 0 \rightarrow \lambda = -2, 1 \pm 3i$ ;  $x_p = Ae^t \rightarrow 27A = 1$

$$x = c_1 e^{-2t} + e^t (c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t) + \frac{1}{27} e^t$$

ii) Si  $n=2$ , es fácil hallar los autovalores:  $\lambda = -3 \pm \sqrt{11}i$ . Asintóticamente estable.

Si  $n=3$ , los hemos hallado arriba.  $\exists \lambda$  con  $\text{Re} \lambda > 0$ . Inestable.

Si  $n=4$ , no sabemos hallar los  $\lambda$ . Como hay  $a_k = 0$  no puede ser AE. Si no hay  $\lambda$  con  $\text{Re} \lambda = 0$  será inestable:  $\lambda = qi \Rightarrow q^4 + 6qi + 20 = 0$  imposible. Es inestable. También lo aseguraba R-H:

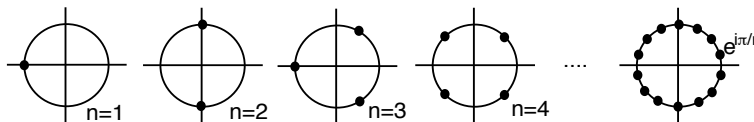
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 20 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \rightarrow 0, -6 < 0, -36 < 0, -720 < 0. \text{ Existen menores negativos y es inestable.}$$

**2.13**  $x^{(n)} + x = \cos t$ ,  $\lambda = \sqrt[n]{-1}$ .

Si  $n=1$ ,  $\lambda = -1 \Rightarrow$  **AE**.

Si  $n=2$ ,  $\lambda = \pm i \Rightarrow$  **EnoA**.

Si  $n \geq 3$ , al menos  $\text{Re}(e^{i\pi/n}) > 0 \Rightarrow$  **I**.



La homogénea tiene infinitas soluciones periódicas si  $i$  es autovalor:  $i^n + 1 = 0 \Leftrightarrow n = 2, 6, \dots, 2006, \dots$   
Como hay solución  $x_p = t(A \cos t + B \sin t)$  ninguna solución de la no homogénea es periódica.

**2.14**  $\begin{cases} x' = 2 - y \\ y' = -2y + cz \\ z' = 2x - y \end{cases}$  a)  $P(\lambda) = - \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & c \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 + c\lambda + 2c$  [ $= (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$  si  $c = -1$ ].

Por el signo de los coeficientes, no AE si  $c \leq 0$ . R-H:  $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2c & c & 2 \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix} \rightarrow 2, 0, 0 \rightarrow$  **nunca es AE**.

Con un poco de vista:  $P(\lambda) = (\lambda+2)(\lambda^2+c) \rightarrow \lambda = -1, \pm\sqrt{-c} \rightarrow$  **EnoA** si  $c > 0$ , **I** si  $c < 0$ , y si  $c = 0$  también **I** (pues hay un único v.p. asociado a  $\lambda = 0$  doble).

b) Para resolverlo por matrices comenzamos hallando los vectores propios:

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \lambda = -1: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda = -2: \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \mathbf{0} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para ahorrarnos calcular  $P^{-1}$  y las integrales buscamos ( $\lambda = 0$  no autovalor):

$$x_p = \begin{pmatrix} a \\ b \\ d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0 = 2 - b & a = 1 \\ 0 = -2b - d & b = 2 \\ 0 = 2a - b & d = -4 \end{cases} \cdot \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{d.i.}} \begin{pmatrix} 1 - e^{-2t} \\ 2 - 2e^{-2t} \\ -4 \end{pmatrix}$$

Convirtiendo en ecuación:  $y = 2 - x' \rightarrow z = x'' + 2x' - 4 \rightarrow x''' + 2x'' - x' - 2 = -2 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-2t} + 1 \\ x(0) = 0, x'(0) = 2, x''(0) = -4 \end{cases} \rightarrow x = 1 - e^{-2t}, y = 2 - x', z = -2y - 2y'$$

$$\text{Laplace: } \begin{cases} sX = \frac{2}{s} - Y \\ sY = -2Y - Z \rightarrow Z = -(s+2)Y \\ sZ + 4 = 2X - Y \end{cases} \quad \begin{cases} (s^3 + 2s^2 - s - 2)Y = 4s - \frac{4}{s} = \frac{4(s+1)(s-1)}{s} \rightarrow Y = \frac{4}{s(s+2)} \downarrow \\ Z = -\frac{4}{s} \end{cases}$$

$$z = -4, Y = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} = \dots = \frac{2}{s} - \frac{2}{s+2} \rightarrow y = 2 - 2e^{-2t}, x = \frac{y-z'}{2} = 1 - e^{-2t}$$

**2.15**  $\begin{cases} x' = z - t^2 \\ y' = -2ay - w \\ z' = -x + ay \\ w' = y + az \end{cases}, \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2a-\lambda & 0 & -1 \\ -1 & a & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & a & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + 2a\lambda^3 + 2\lambda^2 + a(a+2)\lambda + 1$  [ $= (\lambda^2+1)^2$  si  $a = 0$ ].

i) Evitando  $P$  complejas:  $\begin{cases} x' = z \\ z' = -x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ z = -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{cases}, \begin{cases} y' = -w \\ w' = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} w = c_3 \cos t + c_4 \sin t \\ y = -c_3 \sin t + c_4 \cos t \end{cases}$

$$W(t) = \begin{pmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s & c \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{pmatrix}, W^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, W_c(t) = W(t)W^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t & 0 \\ 0 & \cos t & 0 & -\sin t \\ -\sin t & 0 & \cos t & 0 \\ 0 & \sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}$$

Más corto que la f.v.c.:  $\begin{cases} x' = z - t^2 \\ z' = -x \\ x(0) = 1, z(0) = -2 \end{cases}, \begin{cases} x'' + x = -2t \\ x(0) = 1, x'(0) = -2 \end{cases}, \begin{cases} x = \cos t - 2t \\ z = t^2 - 2 - \sin t \end{cases}, \begin{cases} y' = -w \\ w' = y \\ y(0) = w(0) = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = w = 0 \end{cases}$  (evidente)

ii) 1 es raíz de  $\lambda^4 - 4\lambda^3 + 2\lambda^2 + 1$  (única calculable),  $(A-I)v = 0 \rightarrow x = ve^t = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^t$  solución.

iii)  $B = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 0 & 0 \\ a(a+2) & 2 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & a(a+2) & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a > 0, a(2-a) > 0, a^2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = -a^4 > 0$  imposible. Nunca es AE.

**2.16**  $\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = f(t)$ ,  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ . Laplace:  $s^2X + 2sX + 2X = F(s)$ ,  $X = \frac{F(s)}{(s+1)^2+1} \rightarrow$

$x = f(t) * (e^{-t} \text{sen } t) = \int_0^t e^{-(t-s)} \text{sen}(t-s) f(s) ds$ , o sea,  $x(t) = \int_0^t K(t-s) f(s) ds$  con  $K(t) = e^{-t} \text{sen } t$ .

O bien:  $\lambda = -1 \pm i$ ; solución homogénea:  $x = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \text{sen } t$ ; fórmula variación de constantes:

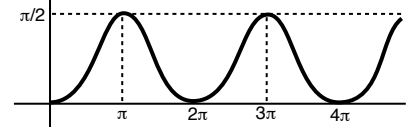
$x_p = e^{-t} \text{sen } t \int_0^t e^{-s} \cos s f(s) ds - e^{-t} \cos t \int_0^t e^{-s} \text{sen } s f(s) ds = \int_0^t e^{-(t-s)} \text{sen}(t-s) f(s) ds$   
(casualmente cumple  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ ).

**2.17**  $|\text{sen } t| = \text{sen } t + 2u_\pi \text{sen}(t-\pi) + 2u_{2\pi} \text{sen}(t-2\pi) + \dots$ ,  $\pi$ -periódica.

i)  $\ddot{x} + x = |\text{sen } t|$ ,  $X = \frac{1}{(s^2+1)^2} [1 + 2e^{-\pi s} + 2e^{-2\pi s} + \dots]$ ,

$x = \frac{1}{2} [\text{sen } t - t \cos t] + u_\pi [-\text{sen } t + (t-\pi) \cos t] + u_{2\pi} [\text{sen } t + (t-2\pi) \cos t] + \dots$

$= \begin{cases} \frac{1}{2} \text{sen } t - \frac{t}{2} \cos t & [0, \pi] \\ -\frac{1}{2} \text{sen } t + (\frac{t}{2} - \pi) \cos t & [\pi, 2\pi] \\ \frac{1}{2} \text{sen } t - (\frac{t}{2} + \pi) \cos t & [2\pi, 3\pi] \\ \dots & \dots \end{cases}$	Es $2\pi$ -periódica.
	Hay única solución $\pi$ -periódica.
	Todas son $2\pi$ -periódicas.

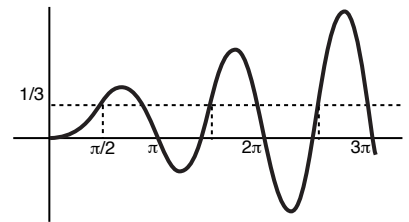


[La única  $\pi$ -periódica cumple  $x(0) = x(\pi) \rightarrow x = \frac{1}{2} \text{sen } t - (\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}) \cos t$ ]

ii)  $\ddot{x} + 4x = |\text{sen } t|$ ,  $X = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} [1 + 2e^{-\pi s} + 2e^{-2\pi s} + \dots]$ ,

$x = [\frac{\text{sen } t}{3} - \frac{\text{sen } 2t}{6}] + 2u_\pi [-\frac{\text{sen } t}{3} - \frac{\text{sen } 2t}{6}] + u_{2\pi} [\frac{\text{sen } t}{3} - \frac{\text{sen } 2t}{6}] + \dots$

$= \begin{cases} \frac{1}{3} \text{sen } t - \frac{1}{6} \text{sen } 2t & [0, \pi] \\ -\frac{1}{3} \text{sen } t - \frac{1}{2} \text{sen } 2t & [\pi, 2\pi] \\ \frac{1}{3} \text{sen } t - \frac{5}{6} \text{sen } 2t & [2\pi, 3\pi] \\ \dots & \dots \end{cases}$	No es periódica.
	Ninguna solución lo es.



### Soluciones problemas 3. Ecuaciones I (C). 08/09

**3.1** a)  $x'' + tx = 0$   $t=0$  regular,  $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} = 0$ ;  $c_k = -\frac{c_{k-3}}{(k-1)k}$ ,  $k=3,4,\dots$ ;

$t^0: c_2=0=c_5=c_8=\dots$ ;  $c_3 = -\frac{c_0}{2 \cdot 3}$ ,  $c_4 = -\frac{c_1}{3 \cdot 4}$ , ...;  $x = c_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{3n}}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1) 3^n n!} \right] + c_1 \left[ t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{3n+1}}{4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n+1) 3^n n!} \right]$

b)  $(1+t^2)x'' - 2x = 0$ ,  $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ ,  $c_k = -\frac{k-4}{k} c_{k-2}$ ,  $c_2=c_0$ ,  $c_4=c_6=\dots=0$ ,  $c_3 = \frac{c_1}{3}$ ,  $c_5 = -\frac{c_1}{3 \cdot 5}$ ,  $c_7 = \frac{c_1}{5 \cdot 7}$ , ...

$x = c_0 [1+t^2] + c_1 \left[ t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)} \right]$   $[x_1 = 1+t^2, x_2 = (1+t^2) \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} \rightarrow x = c_0 [1+t^2] + c_1 [t + (1+t^2) \arctan t]$ .

c)  $\cos t x'' + (2 - \sin t)x' = 0$  Resoluble,  $v = -\frac{C \cos t}{(1 + \sin t)^2}$   $[\int \frac{-2}{\cos t} = 2 \log \frac{1 + \sin t}{\cos t}]$ ,  $x = K + \frac{C}{1 + \sin t} \rightarrow$

$x = K + C[1 - \sin t + \sin^2 t - \sin^3 t + \sin^4 t - \dots] = K + C[1 - t + t^2 + (\frac{1}{6} - 1)t^3 + (1 - \frac{1}{3})t^4 + \dots]$

O bien,  $[1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{24} + \dots][2c_2 + 6c_3 t + 12c_4 t^2 + \dots] + [2 - t + \frac{t^3}{6} - \dots][c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots] = 0$ ,

$t^0: 2c_2 + 2c_1 = 0, c_2 = -c_1$ ;  $t^1: 6c_3 + 4c_2 - c_1 = 0, c_3 = -\frac{5}{6}c_1$ ;  $t^2: 12c_4 + 6c_3 - 3c_2 = 0, c_4 = \frac{2}{3}c_1$ ; ...

O bien,  $x''(0) = -2x'(0)$ ;  $\cos t x''' + (2 - 2 \sin t)x'' - \cos t x' = 0, x'''(0) = 5x'(0)$ ; ...

**3.2**  $x'' + [2 - 2t]x' + [1 - 2t]x = 0$   $t=0$  regular  $\rightarrow$  probamos  $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ , sabiendo que  $c_0 = 0$  y  $c_1 = 1$ .

$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)c_k t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} [2k c_k t^{k-1} - 2k c_k t^k] + \sum_{k=0}^{\infty} [c_k t^k - 2c_k t^{k+1}] = 0 \rightarrow$

$t^0: 2c_2 + 2c_1 + c_0 = 2c_2 + 2 = 0 \rightarrow c_2 = -1$ ;  $t^1: 6c_3 + 4c_2 - c_1 - 2c_0 = 6c_3 - 5 = 0 \rightarrow c_3 = \frac{5}{6}$ ;

$t^2: 12c_4 + 6c_3 - 3c_2 - 2c_1 = 12c_4 + 6 = 0 \rightarrow c_4 = -\frac{1}{2}$ . Tenemos:  $x = t - t^2 + \frac{5}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^4 + \dots$ .

O bien:  $x''(0) + 2x'(0) + x(0) = 0, x''(0) = -2$ . Y derivando la ecuación:

$x''' + [2 - 2t]x'' - [1 + 2t]x' - 2x = 0 \rightarrow x'''(0) + 2x''(0) - x'(0) - 2x(0) = 0, x'''(0) = 5$

$x^{iv} + [2 - 2t]x''' - [3 + 2t]x'' - 4x' = 0 \rightarrow x^{iv}(0) + 2x'''(0) - 3x''(0) - 4x'(0) = 0, x^{iv}(0) = -12$

$x_1 = e^{-t}, e^{-\int a} = e^{t^2 - 2t} \rightarrow x = ce^{-t} + ke^{-t} \int_0^t e^{s^2} ds \xrightarrow{\text{d.i.}} x = e^{-t} \int_0^t e^{s^2} ds = e^{-t} \int_0^t [1 + s^2 + \frac{1}{2}s^4 + \dots] ds$   
 $= [1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \dots][t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{10}t^5 + \dots] = t - t^2 + [\frac{1}{3} + \frac{1}{2}]t^3 - [\frac{1}{3} + \frac{1}{6}]t^4 + \dots \uparrow$

**3.3**  $(1-t)(1-2t)x'' + 2tx' - 2x = 0$   $t=0$  regular,  $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \rightarrow c_k = \frac{3(k-2)}{k} c_{k-1} - \frac{2(k-3)}{k} c_{k-2}$ ,

$c_0 = c_1 = 1 \rightarrow c_2 = 1, c_3 = 1, \dots$  Si  $c_{k-2} = c_{k-1} = 1 \Rightarrow c_k = \frac{k}{k} = 1 \rightarrow x = \sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}$ .

[O bien,  $x_1 = t, e^{-\int a} = e^{-\int (\frac{2}{1-t} - \frac{2}{1-2t})} = e^{-2 \ln \frac{1-2t}{1-t}} = \frac{(1-t)^2}{(1-2t)^2}$ ,  $x_2 = t \int \frac{1-2t}{t^2(1-t)^2} = \int (\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(1-t)^2}) = -\frac{1}{1-t}, x = c_1 t + \frac{c_2}{1-t} + \text{d.i.}]$

La serie converge en  $(-1, 1)$  [ el teorema aseguraba que convergía al menos en  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  ].

$t = \frac{1}{2}$  (con  $r = 2, 0$ ) y  $t = 1$  (con  $r = 0, -1$ ) son singulares regulares.

En  $t = 1$  falla el TEU. Como  $x = c_1 t + \frac{c_2}{1-t}$  ninguna solución satisface esos datos.

**3.4**  $2\sqrt{t}y'' - y' = 0$   $t=0$  no es singular regular ( $a^*(t) = -\frac{\sqrt{t}}{2}$  no es analítica en  $t=0$ ).

$t^{-1} = s \searrow 2[1+s]^{1/2} y'' - y' = 0, 2[1 + \frac{s}{2} - \frac{s^2}{8} + \dots][2c_2 + 6c_3 s + \dots] - [c_1 + 2c_2 s + 3c_3 s^2 + \dots] = 0$ ,

$s^0: 4c_2 - c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{4}c_1$ ;  $s^1: 12c_3 + 2c_2 - 2c_2 = 0, c_3 = 0$ ; ...  $y = 1 + (t-1) + \frac{1}{4}(t-1)^2 + \dots$ .

O bien,  $y''(1) = \frac{y'(1)}{2} = \frac{1}{2}$ ;  $2\sqrt{t}y''' + (\frac{1}{\sqrt{t}} - 1)y'' = 0, y'''(1) = 0$ ; ...  $y = y(1) + y'(1)(t-1) + \dots \uparrow$

[Solución calculable sin series:  $v' = \frac{v}{2\sqrt{t}}, v = Ce^{\sqrt{t}}, y = K + C(\sqrt{t} - 1)e^{\sqrt{t}} \xrightarrow{\text{d.i.}} y = 1 + 2(\sqrt{t} - 1)e^{\sqrt{t}}$ ].

**3.5**  $4t^2 x'' - 3x = t^2$  a)  $t = s + 1 \rightarrow 4(s^2 + 2s + 1)x'' - 3x = 0 \rightarrow x = s + \frac{1}{8}s^3 - \frac{1}{8}s^4 + \dots \downarrow$

$x''(1) = 0$ ;  $4t^2 x''' + 8tx'' - 3x' = 0, x'''(1) = \frac{3}{4}$ ; ...  $x = (t-1) + \frac{1}{8}(t-1)^3 - \frac{1}{8}(t-1)^4 + \dots$ .

b) Euler.  $\lambda(\lambda - 1) - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \lambda = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, x_p = At^2 \rightarrow 8A - 3A = 1 \rightarrow x = c_1 t^{3/2} + c_2 t^{-1/2} + \frac{1}{5}t^2$ .

**3.6**  $3(1+t^2)x'' + 2tx' = 0$   $v' = -\frac{2t}{3(1+t^2)}v \rightarrow x = K + C \int (1+u^2)^{-1/3} du$ ;

$$x = \int_0^t (1 - \frac{u^2}{3} + \frac{2u^4}{9} + \dots) du = \boxed{t - \frac{t^3}{9} + \frac{2t^5}{45} + \dots}$$
 se anula en  $t=0$ .

O bien  $t=0$  regular,  $c_0=0, c_1=1$  (para que se anule en  $t=0$ )  $\Rightarrow c_2=0, c_3=-\frac{1}{9}, c_4=0, \dots$

Como  $\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt[3]{1+u^2}}$  diverge ( $\sim \frac{1}{u^{2/3}}$  en  $\infty$ ) hay soluciones no acotadas.

O bien,  $t = \frac{1}{s} \rightarrow 3s(1+s^2)\ddot{x} + (4+6s^2)\dot{x} = 0$ , con  $r=0, -\frac{1}{3}$ ;  $x_2 = s^{-1/3} \sum$  no acotada en  $s=0$ .

**3.7**  $2t^2x'' + t(t+1)x' - (2t+1)x = 0$   $t=0$  singular regular,  $r=1, -\frac{1}{2}$  ( $x_2 = t^{-1/2} \sum$  no está acotada).

Análítica es  $x_1 = \sum_{k=0}^\infty c_k t^{k+1} \rightarrow \sum_{k=0}^\infty [2k(k+1)c_k t^{k+1} + (k+1)c_k t^{k+2} + (k+1)c_k t^{k+1} - 2c_k t^{k+2} - c_k t^{k+1}] = 0$ ,

$$t^1: 0 \cdot c_0 = 0 \text{ (} c_0 \text{ indeterminado); } c_k = -\frac{k-2}{(2k+3)k} c_{k-1}, c_1 = -\frac{1}{5} c_0, c_2=0=c_3=c_4=\dots \rightarrow \boxed{x = t(1 + \frac{t}{5})}$$
.

**3.8**  $3tx'' + (2-6t)x' + 2x = 0$   $t=0$  es singular regular con  $\lambda(\lambda-1) + \frac{2}{3}\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{3}, 0$ . Es no analítica

$$x_1 = t^{1/3} \sum_{k=0}^\infty c_k t^k \rightarrow \sum_{k=0}^\infty [3(k+\frac{1}{3})(k-\frac{2}{3})c_k t^{k-2/3} + 2(k+\frac{1}{3})c_k t^{k-2/3} - 6(k+\frac{1}{3})c_k t^{k+1/3} + 2c_k t^{k+1/3}] \rightarrow$$

$$t^{-2/3}: 0c_0=0; t^{1/3}: 4c_1=0; t^{k-2/3}: c_k = \frac{6(k-1)}{k(3k+1)} c_{k-1} \rightarrow c_2=c_3=\dots=0 \rightarrow \boxed{x_1 = t^{1/3}}$$
.

$$x_2 = t^{1/3} \int \frac{e^{\int (2-\frac{2}{3t}) dt}}{t^{2/3}} dt = t^{1/3} \int \frac{1+2t+2t^2+\frac{4}{3}t^3+\dots}{t^{4/3}} dt = -3(1-t-\frac{2}{5}t^2-\frac{1}{6}t^4+\dots) = -3 \sum \frac{2^n t^n}{n!(1-3n)}$$
. O bien:

$$x_2 = \sum_{k=0}^\infty b_k t^k \rightarrow \sum_{k=0}^\infty [(3k-1)k b_k t^{k-1} - 2(3k-1)b_k t^k] = 0 \rightarrow t^0: b_1 = -b_0; t^1: b_2 = \frac{2}{5} b_1 = -\frac{2}{5} b_0;$$

$$t^{k-1}: b_k = \frac{2(3k-4)}{k(3k-1)} b_{k-1} \rightarrow b_3 = \frac{5}{12} b_2 = -\frac{1}{6} b_0; \dots \rightarrow \boxed{x_2 = 1 - t - \frac{2}{5}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \dots}$$
.

**3.9**  $4tx'' + 2x' + x = 0$   $t=0$  singular regular,  $r = \frac{1}{2}, 0$ ;  $x_2 = \sum_{n=0}^\infty c_n t^n$  no se anula;  $c_k = -\frac{1}{2k(2k-1)} c_{k-1}$ ,

$$x_2 = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} t^k = \cos \sqrt{t}, t \geq 0; x_1 = \cos \sqrt{t} \int \frac{t^{-1/2}}{\cos^2 \sqrt{t}} = 2 \operatorname{sen} \sqrt{t} \rightarrow \boxed{x = c_1 \cos \sqrt{t} + c_2 \operatorname{sen} \sqrt{t}}$$
.

$$s = t^{1/2} \rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds} \frac{1}{2s}, \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2} \frac{1}{4s^2} - \frac{dx}{ds} \frac{1}{4s^3}, \frac{d^2x}{ds^2} + s = 0, x = c_1 \cos s + c_2 \operatorname{sen} s$$

**3.10**  $ty'' + y = 0$   $t=0$  sing. regular,  $r=1, 0$ ;  $y_1 = \sum_{n=0}^\infty c_n t^{n+1}$  se anula en  $t=0$ ;  $\sum_{n=0}^\infty [(k+1)k c_k t^k + c_k t^{k+1}] = 0$ ,

$$c_k = -\frac{1}{(k+1)k} c_{k-1}, c_1 = -\frac{c_0}{2 \cdot 1}, c_2 = -\frac{c_1}{3 \cdot 2} = \frac{c_0}{3 \cdot 2 \cdot 1}, c_3 = -\frac{c_2}{4 \cdot 3} = -\frac{c_0}{4!}, \dots; \boxed{y_1 = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(k+1)!k!} t^{k+1}} = t - \frac{t^2}{2} + \dots$$

$$y_2 = \sum_{n=0}^\infty b_n t^n + dy_1 \log t \rightarrow b_0 + \sum_{n=1}^\infty [(k+1)k b_{k+1} + b_k] t^k + 2dy_1' - \frac{d}{t} y_1 = 0; t^0: b_0 + 2d - d = 0, \boxed{d = -b_0}$$
.

**3.11**  $t^2x'' + t(4-t)x' + 2(1-t)x = 0$   $t=0$  sing. regular,  $r=-1, -2 \rightarrow x_1 = \sum_{k=0}^\infty c_k t^{k-1}, x_2 = \sum_{k=0}^\infty b_k t^{k-2} + dx_1 \ln t$ .

$$\sum_{k=0}^\infty [(k-1)(k-2)c_k t^{k-1} + 4(k-1)c_k t^{k-1} - (k-1)c_k t^k + 2c_k t^{k-1} - 2c_k t^k] = \sum_{k=0}^\infty [k(k+1)c_k t^{k-1} - (k+1)c_k t^k] = 0 \rightarrow$$

$$t^{k-1}: k(k+1)c_k - k c_{k-1} \rightarrow c_k = \frac{c_{k-1}}{k+1}. t^{-1}: 0c_0=0. \text{ Con recurrencia: } c_1 = \frac{c_0}{2}; c_2 = \frac{c_1}{3} = \frac{c_0}{3!}; c_3 = \frac{c_2}{4} = \frac{c_0}{4!}; \dots$$

$$c_k = \frac{c_0}{(k+1)!} \xrightarrow{c_0=1} \boxed{x_1 = \frac{1}{t} [1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots + \frac{t^k}{(k+1)!} + \dots]} = \frac{e^t - 1}{t^2} \quad [\rightarrow x_1' = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{6} + \dots].$$

$$x_2 \text{ por series: } x_2' = \sum_{k=0}^\infty (k-2)b_k t^{k-3} + dx_1' \ln t + \frac{dx_1}{t}, x_2'' = \sum_{k=0}^\infty (k-2)(k-3)b_k t^{k-4} + dx_1'' \ln t + \frac{2dx_1'}{t} - \frac{dx_1}{t^2}$$

$$\rightarrow \sum_{k=0}^\infty [k(k-1)b_k t^{k-2} - k b_k t^{k-1}] + 2dx_1' + d(3-t)x_1 = 0. t^{-2}: b_0 \text{ indeterminado;}$$

$$t^{-1}: d=0 \text{ (} b_1 \text{ indeterminado, elegimos } b_1=0); t^{k-2}: b_k = \frac{b_{k-1}}{k} \rightarrow b_2=b_3=\dots=0 \rightarrow \boxed{x_2 = \frac{1}{t^2}}$$

$$\text{Identificada } x_1: x_2 = \frac{e^t - 1}{t^2} \int \frac{t^4 - t^4 e^t}{(e^t - 1)^2} = -\frac{1}{t^2}. \text{ Hallada } x_2: x_1 = \frac{1}{t^2} \int \frac{t^{-4} e^t}{t^{-4}} = \frac{e^t}{t^2}. \text{ Solución general: } x = \frac{c_1 e^t}{t^2} + \frac{c_2}{t^2}$$

**3.12**  $t(1+t)x'' + (2+3t)x' + x = 0$   $t=0$  singular regular,  $r=0, -1 \rightarrow x_1 = \sum_{k=0}^\infty c_k t^k$  acotada en  $t=0$ .

$$\sum_{k=2}^\infty [k(k-1)c_k t^{k-1} + k(k-1)c_k t^k] + \sum_{k=1}^\infty [2k c_k t^{k-1} + 3k c_k t^k] + \sum_{k=0}^\infty c_k t^k = 0 \rightarrow c_{k+1} = -\frac{k+1}{k+2} c_k \rightarrow$$

$$\boxed{x_1 = 1 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 - \frac{1}{4}t^3 + \dots + (-1)^k \frac{1}{k+1} t^k + \dots} = \frac{\log(1+t)}{t}, \text{ función no analítica en } t=-1.$$

Si no se identifica la serie:  $s = t+1 \rightarrow s(s-1)x'' + (3s-1)x' + x = 0 \rightarrow r=0$  doble  $\rightarrow$

$$x_1 = \sum_{k=0}^\infty c_k s^k \text{ analítica, pero } x_2 = s \sum_{k=0}^\infty b_k s^k + x_1 \log s \text{ no analítica en } s=0 \text{ (} t=-1).$$

$$\text{Utilizando que } x_1 = \frac{1}{t}: e^{-\int \frac{2+3t}{t(1+t)} dt} = e^{-\int [\frac{2}{t} + \frac{1}{1+t}]} = \frac{1}{t^2(1+t)}, x_2 = \frac{1}{t} \int \frac{dt}{1+t} = \frac{\log(1+t)}{t},$$

solución acotada en  $t=0$  con el desarrollo de arriba y claramente no analítica en  $t=-1$ .

**3.13**  $(1-t^2)x'' - tx' + p^2x = 0$   $t=0$  regular,  $x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \rightarrow c_{k+2} = \frac{k^2-p^2}{(k+2)(k+1)} c_k \rightarrow$

$$x_1 = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p^2(2^2-p^2)\dots((2n-2)^2-p^2)}{(2n)!} t^{2n}, \quad x_2 = t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1^2-p^2)(3^2-p^2)\dots((2n-1)^2-p^2)}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Hay soluciones polinómicas cuando  $p$  es entero (si  $p$  par, es polinomio  $x_1$ ; si  $p$  impar,  $x_2$ ).

**3.14**  $tx'' + (1-t^2)x' + ptx = 0$   $r = 0$  doble;  $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ ; recurrencia:  $c_k = -\frac{p-k+2}{k^2} c_{k-2}$ ;  $c_1 = 0 = c_3 = \dots$

Si  $p = 2n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $x_1$  es un polinomio de grado  $2n$ . Si  $p = 4$ ,  $x_1 = 1 - t^2 + \frac{1}{8}t^4$ .

**3.15**  $t^2y'' + ty' + (t^2 - \frac{1}{4})y = 0$   $y = t^r u \rightarrow t^{r+2}u'' + (2r+1)t^r u' + [(r^2 - \frac{1}{4})t^r + t^{r+2}]u = 0$ ,

Eligiendo  $r = -\frac{1}{2}$  se obtiene  $u'' + u = 0 \rightarrow u = c_1 \cos t + c_2 \sin t$ . Solución:  $y = c_1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + c_2 \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ .

ii)  $t=0$  singular regular,  $r = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ ;  $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1/2}$ ,  $x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^{k-1/2} + dx_1 \ln t$ . Probamos  $x_2$  con  $d=0$ :

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})b_k t^{k-1/2} + (k-\frac{1}{2})b_k t^{k-1/2} - \frac{1}{4}b_k t^{k-1/2} + b_k t^{k+3/2}] = \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1)b_k t^{k-1/2} + b_k t^{k+3/2}] = 0;$$

$t^{-1/2}$ :  $0b_0 = 0, b_0$  indeterminado;  $t^{1/2}$ :  $0b_1 = 0, b_1$  también indeterminado;  $t^{3/2}$ :  $b_2 = -\frac{1}{2}b_0$ ;  $t^{5/2}$ :  $b_3 = -\frac{1}{6}b_1$ ;

$$b_k = -\frac{1}{k(k-1)} b_{k-2} = \frac{1}{k(k-1)(k-2)(k-3)} b_{k-4} = \dots; \quad x = t^{-1/2} [b_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} + b_1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}]$$

**3.16**  $t^2(1+t)x'' + t(3+2t)x' + x = 0$   $t=0$  singular regular,  $r = -1$  doble;  $x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n-1}$ ,

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k-1)(k-2)c_k t^{k-1} + (k-1)(k-2)c_k t^k + 3(k-1)c_k t^{k-1} + 2(k-1)c_k t^k + c_k t^{k-1}] = 0 \rightarrow$$

$t^{-1}$ :  $c_0$  indeterminado;  $t^0$ :  $2c_0 - 2c_0 + c_1 = 0, c_1 = 0$ ;  $c_k$  en función del anterior  $\rightarrow x_1 = \frac{1}{t}$ .

$-\int \frac{3+2t}{t(1+t)} dt = \int [\frac{1}{t+1} - \frac{3}{t}] dt, x_2 = \frac{1}{t} \int \frac{t+1}{t} dt = 1 + \frac{\ln t}{t}$ .  $x_1$  y  $x_2$  acotadas cuando  $t \rightarrow \infty$ .

O bien,  $t = \frac{1}{s} \rightarrow s(1+s)\ddot{x} - s\dot{x} + x = 0, r = 1, 0, x_1 = s \sum \cdot, y x_2 = \sum \cdot + dx_1 \ln s$  acotadas en  $s=0$ .

**3.17**  $[t^4+t^2]x'' + [5t^3+t]x' + [3t^2-1]x = 0$   $s = 1/t \rightarrow [e^{\infty}] s^2[1+s^2]\ddot{x} + s[s^2-3]\dot{x} + [3-s^2]x = 0. \rightarrow r=3, 1.$

$t=0$  sing. regular,  $r=1, -1 \Rightarrow$  hay soluciones que  $\rightarrow 0$ :  $x_1 = t \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k, [x_2 = t^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k + dx_1 \log t$  no acotada].

Y todas tienden a 0 cuando  $t \rightarrow \infty$ , pues  $x_1^{\infty} = s^3 \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k, x_2^{\infty} = s \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k + dx_1 \log s \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow 0$ .

Hay una solución sencilla de  $[e^{\infty}]$ :  $x_1 = s \rightarrow x_2 = s \int \frac{e^{\int \frac{3-s^2}{s(1+s^2)} ds}}{s^2} = s \int \frac{s}{(1+s^2)^2} = -\frac{1}{2} \frac{s}{1+s^2} = -\frac{1}{2} \frac{t}{1+t^2}$

$\rightarrow$  solución general:  $x = \frac{c_1}{t} + \frac{c_2 t}{1+t^2}$ , y la segunda tiende a 0 tanto si  $t \rightarrow 0$  como si  $t \rightarrow \infty$ .

O bien, resolviendo por series directamente en  $t=0$ :  $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+1} \rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)k+(k+1)-1]c_k t^{k+1} + [(k+1)k+5(k+1)+3]c_k t^{k+3} = \sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)k c_k t^{k+1} + (k+4)(k+2)c_k t^{k+3}] = 0$$

$\rightarrow c_0$  indeterminado;  $c_1 = 0$ ;  $c_k = -c_{k-2} \rightarrow c_2 = -c_0, c_4 = -c_2 = c_0, \dots, c_3 = c_5 = \dots = 0 \rightarrow$

$$x_1 = c_0 [t - t^3 + t^5 - t^7 + \dots] = \frac{c_0 t}{1+t^2} \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0 \text{ o si } t \rightarrow \infty$$

[la serie sólo converge si  $|x| < 1$ , pero la función de la que es desarrollo está definida  $\forall t$ ].

Para responder la última pregunta no era necesario resolver ninguna ecuación: el polinomio indicial en 0 dice que hay soluciones  $x$  que se anulan en 0 y [como en toda lineal con coeficientes continuos en  $(0, \infty)$ ] estas soluciones llegan hasta infinito, y tienden a 0 si  $t \rightarrow \infty$ , porque todas las soluciones lo hacen, según asegura el polinomio indicial de  $[e^{\infty}]$ .

**3.18**  $t^4x'' + 2t^3x' - x = 1$   $t=0$  singular no regular;  $t = \frac{1}{s} \rightarrow \ddot{x} - x = 1 \Rightarrow s=0$  ( $t=\infty$ ) regular.

$$x = c_1 e^s + c_2 e^{-s} + 1 \rightarrow x = c_1 e^{1/t} + c_2 e^{-1/t} + 1 \quad \begin{matrix} x(1)=0, x'(1)=1 \\ \rightarrow \\ x = e^{1-\frac{1}{t}} - 1 \end{matrix}$$

**3.19**  $(1-t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$   $P_1 = t \rightarrow x_1 = t \int \frac{e^{\int \frac{2t(1-t^2)}{t^2} dt}}{t^2} = t \int [\frac{1}{t^2} + \frac{1/2}{1+t} + \frac{1/2}{1-t}] = \frac{t}{2} \ln |\frac{1+t}{1-t}| - 1$

$$1 - \frac{t}{2} [\ln(1+t) - \ln(1-t)] \stackrel{t \leq 1}{=} 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n-1} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-3) \cdot 2 \cdot 4 \dots 2n}{(2n)!} t^{2n} \text{ (serie de los apuntes con } p=1).$$

$t = \frac{1}{s} \rightarrow s^2(s^2-1)\ddot{x} + 2s^3\dot{x} + 2x = 0, s=0$  sing. regular,  $r = 2, -1$ ;  $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{k+2}, c_0$  indet.,  $c_1 = 0$ ,

$$c_k = \frac{k+1}{k+3} c_{k-2} \rightarrow c_3 = c_5 = \dots = 0, c_2 = \frac{3}{5} c_0, c_4 = \frac{3}{7} c_0, \dots, x_1 = \frac{s^2}{3} + \frac{s^4}{5} + \frac{s^6}{7} + \dots = \frac{1}{3t^2} + \frac{1}{5t^4} + \frac{1}{7t^6} + \dots \quad \begin{matrix} |s| < 1 \\ |t| > 1 \end{matrix}$$

$1 - \frac{1}{2s} \ln |\frac{1+s}{1-s}| = 1 - \frac{s+s^3/3+\dots}{s} = -\frac{s^2}{3} - \frac{s^4}{5} - \dots$  casi la misma.  $x_2 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k + d \ln x_1$  dará  $x_2 = \frac{1}{s} = t$ .

**3.20**  $(1-t^2)x'' - 2tx' + x = 0$  Como  $t=0$  es regular ( $a$  y  $b$  son analíticas para  $|t| < 1$ ), probamos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k \rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} [k(k-1)c_k t^{k-2} - k(k-1)c_k t^k] + \sum_{k=1}^{\infty} -2k c_k t^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k = 0 \rightarrow$$

$$t^0: 2c_2 + c_0 = 0 \rightarrow c_2 = -\frac{c_0}{2}; \quad t^1: 6c_3 - 2c_1 + c_1 = 0 \rightarrow c_3 = \frac{c_1}{6}; \quad t^k: (k+2)(k+1)c_{k+2} - (k^2 + k - 1)c_k = 0$$

$$\rightarrow c_{k+2} = \frac{k^2 + k - 1}{(k+2)(k+1)} c_k \rightarrow c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{11}{20} c_3 = \frac{11}{120} c_1 \rightarrow \boxed{x = t + \frac{1}{6}t^3 + \frac{11}{120}t^5 + \dots} \quad [c_0 = x(0), \quad c_1 = x'(0)].$$

De otra forma:  $x''(0) + x(0) = 0 \rightarrow x''(0) = 0$ . Y derivando:  $(1-t^2)x''' - 4tx'' - x' = 0 \rightarrow x'''(0) = x'(0) = 1$ ,  
 $(1-t^2)x^{IV} - 6tx''' - 5x'' = 0 \rightarrow x^{IV}(0) = 5x''(0) = 0$ ,  $(1-t^2)x^V - 8tx^{IV} - 11x''' = 0 \rightarrow x^V(0) = 11x'''(0) = 11$ .

Haciendo  $t+1=s$  obtenemos  $(2s-s^2)x'' + 2(1-s)x' + x = 0$ ,  $s^2x'' + s\frac{2(1-s)}{2-s}x' + \frac{s}{2-s}x = 0 \rightarrow$   
 $r^2 = 0 \rightarrow$  ni  $x_1 = c_0 + c_1s + \dots$  ni  $x_2 = b_0s + \dots + x_1 \ln|s|$  tienden a 0 si  $s \rightarrow 0$  ( $t \rightarrow -1$ ).

Con  $t = \frac{1}{s}$  nos queda  $s^2(s^2-1)\ddot{x} + 2s^3\dot{x} + x = 0 \rightarrow r^2 - r - 1 = 0 \rightarrow r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \equiv r_{\pm}$

$x_1 = s^{r_+} \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \rightarrow 0$  cuando  $s \rightarrow 0^+$  ( $t \rightarrow \infty$ ). [La otra,  $x_2 = s^{r_-} \sum_{k=0}^{\infty} b_k s^k$ , no lo hace].

**3.21**  $t(t-1)x'' + x' - px = 0$   $t=0$  singular regular,  $r = 2, 0$ ;  $x_1 = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^{k+2}$ ;  $c_k = \frac{(k+1)k-p}{k(k+2)} c_{k-1}$ ;

$x_1$  será polinomio si  $\boxed{p = n(n+1)}$ ,  $n = 1, 2, \dots$   $P_1 = t^2$ ,  $P_2 = t^2 - \frac{4}{3}t^3, \dots$

Si  $\boxed{p=0}$ ,  $x_1$  no lo es, pero lo será  $x_2 = 1$  (será  $d=0$  en el teorema de Frobenius).

Para  $p=2$ ,  $x_2 = t^2 \int \frac{e^{-\int [1/(t^2-t)]}}{t^4} = t^2 \ln|\frac{t-1}{t}| + t + \frac{1}{2} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$   $[\frac{\ln(1-s)+s+\frac{s^2}{2}}{s^2} \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 0]$

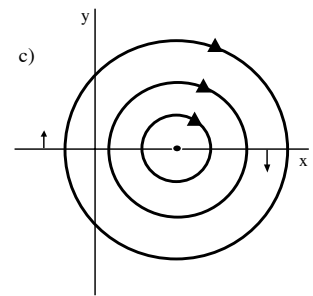
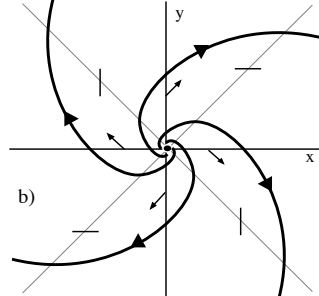
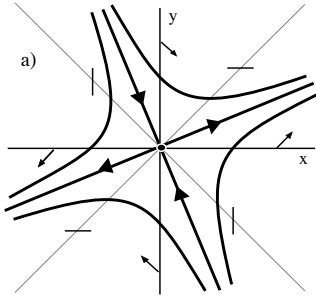
O bien,  $t = \frac{1}{s} \rightarrow s^2(1-s)\ddot{x} + s(2-3s)\dot{x} - 2x = 0$ ,  $r = 1, -2$ , hay soluciones  $x_1 = s \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$ .

## Soluciones problemas 4. Ecuaciones I (C). 08/09

**4.1** a)  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases} \quad \lambda = \pm\sqrt{2} \rightarrow \left( \pm\sqrt{2} - 1 \right), \text{ silla.} \quad \begin{array}{l} \text{Horizontal: } y = x \\ \text{Vertical: } y = -x \end{array} \cdot \mathbf{v}(x, 0) = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0, y) = y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$

b)  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y - x \end{cases} \quad \lambda = 1 \pm i, \text{ foco l.} \quad \begin{array}{l} \text{Horizontal: } y = -x \\ \text{Vertical: } y = x \end{array} \cdot \mathbf{v}(x, 0) = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0, y) = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

c)  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + 1 \end{cases} \quad \text{Punto crítico } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \lambda = \pm i, \text{ centro (lineal).} \quad \text{Órbitas: } y^2 + (x-1)^2 = C. \quad \mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-x \end{pmatrix}.$

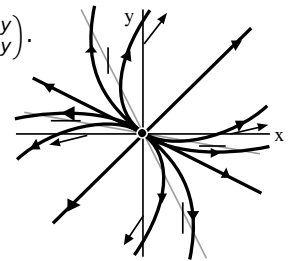


**4.2**  $\begin{cases} x' = 4x + 2y \\ y' = x + 5y \end{cases} \quad \text{Lineal. } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : 6, 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{H: } x = -5y \\ \text{V: } y = -2x \end{array}, \mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 4x \\ x \end{pmatrix}, \mathbf{v}(0, y) = \begin{pmatrix} 2y \\ 5y \end{pmatrix}.$

Solución: Órbita  $y = -\frac{x}{2} \rightarrow \begin{cases} x' = 3x \\ x(0) = 2 \end{cases} \rightarrow x = 2e^{3t}, y = -e^{3t}.$

[O imponiendo datos a la solución general  $x = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$ , o por Laplace].

Órbitas:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+5y}{4x+2y} \xrightarrow{z=y/x} \int \frac{(2z+4)dz}{1+z-2z^2} = \int \left[ \frac{2}{2z+1} - \frac{2}{z-1} \right] dz = \ln|x| + C \rightarrow \frac{2y+x}{(y-x)^2} = C.$



**4.3**  $\begin{cases} x' = x + 2y - 3 \\ y' = 4x - y - 3 \end{cases} \quad \text{El sistema (además de claramente lineal) es exacto:}$

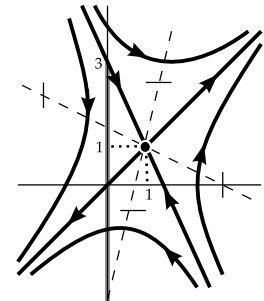
$\begin{array}{l} H_y = x + 2y - 3 \\ H_x = y - 4x + 3 \end{array} \rightarrow H = y^2 + xy - 2x^2 - 3y + 3x = C.$

O con un poco de vista,  $\boxed{(y-x)(y+2x-3) = C}$ , órbitas.

El punto crítico:  $x = 3 - 2y \searrow$   
 $9 - 9y = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  ha de ser silla o centro.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 3$  silla, con  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ , respectivamente.

$\mathbf{v}$  es vertical si  $x = 3 - 2y$  y horizontal si  $y = 4x - 3$ .



A la vista del mapa de fases, las soluciones (definidas  $\forall t$  por ser lineal con coeficientes continuos) tales que su  $y(t) \rightarrow -\infty$  si  $t \rightarrow \infty$  son las situadas a la izquierda de la separatriz estable:  $y = 3 - 2x$  [recta de pendiente  $-2$  por  $(1, 1)$ ]. Como esta separatriz corta  $x=0$  en  $y=3$ , los  $a$  pedidos son los  $\boxed{a < 3}$ .

**4.4**  $(1+x^3y) + (x^4+x^3y)\frac{dy}{dx} = 0 \quad g(x) = \frac{1}{x^3}$  f.int.  $\frac{1}{x^3} + y + (x+y)\frac{dy}{dx}$  exacta.

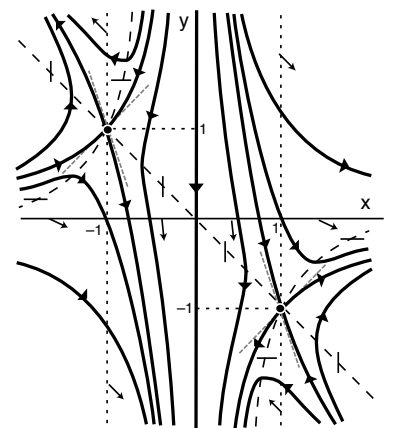
$y^2 + 2xy - \frac{1}{x^2} = C \xrightarrow{y(1)=1} y = -x \pm (x + \frac{1}{x}) \rightarrow y = \frac{1}{x} \quad (y = -2x - \frac{1}{x} \text{ no lo cumple})$

Solución única, pues  $f \equiv \frac{-1-x^3y}{x^4+x^3y}$  y  $f_y$  continuas en entorno de  $(1, 1)$ .

$\begin{cases} x' = x^4 + x^3y \\ y' = -1 - x^3y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} : \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sillas.}$

Separatrices:  $\begin{pmatrix} 1, -1 \\ -1, 1 \end{pmatrix} \rightarrow C = -2 \rightarrow y = -x \pm (x - \frac{1}{x}) = -\frac{1}{x}, -2x + \frac{1}{x}.$

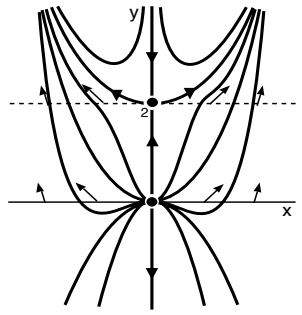
Vertical:  $y = -x, y = 0 \quad \mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} x^4 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}(\pm 1, y) = (1 \pm y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$



**4.5**  $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y - y^2 + x^4 \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x} + x^3$  de Riccati.  $y = z + x^2 \rightarrow$   
 $z' = (\frac{2}{x} - 2x)z - \frac{z^2}{x} \xrightarrow{z=1/u} u' = (2x - \frac{2}{x})z + \frac{1}{x} \rightarrow y = x^2 + \frac{2x^2}{Ce^{x^2-1}}$

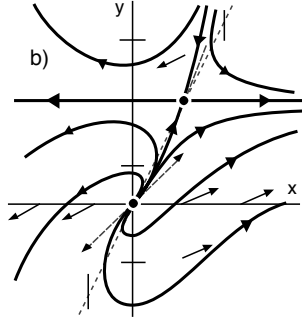
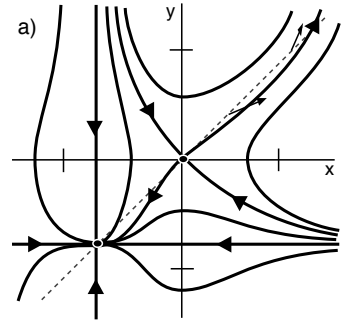
Aproximación lineal  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4x^3 & 2-2y \end{pmatrix}$  en  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1, 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , nodo I.  
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1, -2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , silla.

Vertical si  $x=0$  (órbita). Horizontal si  $y=1 \pm \sqrt{1+x^4}$ .  $\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}(x, 2) = \begin{pmatrix} x \\ x^4 \end{pmatrix}$ .



**4.6** a)  $\begin{cases} x' = y(x+1) \\ y' = x(y^3+1) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} : -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , nodo E.  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \pm 1 \rightarrow \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , silla.  $\mathbf{v}(x, x) = x \begin{pmatrix} 1+x \\ 1+x^3 \end{pmatrix}$ .

Órbitas complicadas. Horizontal:  $x=0, y=-1$ . Vertical:  $y=0, x=-1$ .

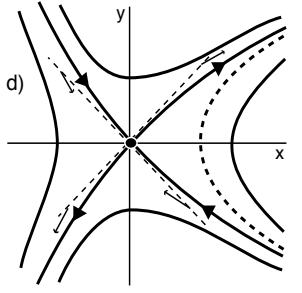
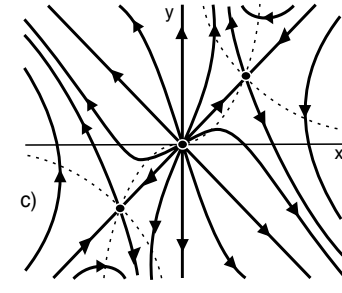


b)  $\begin{cases} x' = 4x - 2y \\ y' = 2x - xy \end{cases} \quad \text{H: } x=0, y=2. \text{ V: } y=2x$   
 Órbitas no calculables

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : 2$  doble  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , nodo I tgl.  
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} : 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ , silla.  $\mathbf{v}(x, 0) = 2x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  
 $\mathbf{v}(1, y) = (2-y) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .  $\mathbf{v}(x, \frac{5x-1}{2}) = (1-x) \begin{pmatrix} 1 \\ 5x/2 \end{pmatrix}$ .

c)  $\begin{cases} x' = x - x^2 y \\ y' = y - x^3 \end{cases} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$  factor int.  $\frac{y}{x^2} - x + (y - \frac{1}{x}) \frac{dy}{dx}$  exacta. Órbitas:  $y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2} + 2C + x^2}$ .

$C = \pm 1 \rightarrow y = \mp x, y = \pm x + \frac{2}{x}$ ,  
 Horizontal:  $y=x^3$ . Vertical:  $x=0, y=\frac{1}{x}$ .

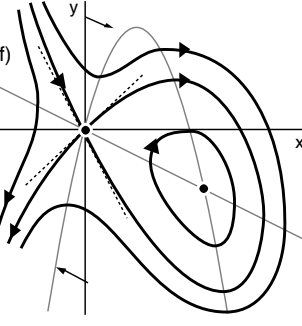
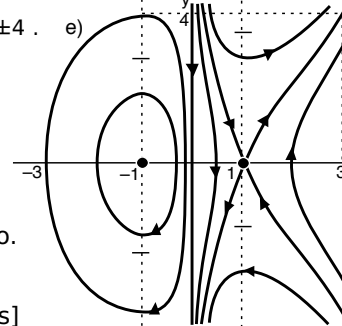


d)  $\begin{cases} x' = ye^x \\ y' = e^x - 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \pm 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ , silla. H:  $x=0$ . V:  $y=0$ .

Órbitas:  $y^2 = 2x + 2e^{-x} + C$ .  $\mathbf{v}(x, x) = \begin{pmatrix} \pm e^x \\ e^x - 1 \end{pmatrix}$ .  
 Separatrices:  $y = \pm \sqrt{2x + 2e^{-x} - 2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \pm \sqrt{2x - 2}$ .

e)  $\begin{cases} x' = x^2 y \\ y' = x^4 - 1 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 4x^3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 4 & 0 \end{pmatrix} + \text{silla}, \pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 2 \end{pmatrix}$  f(x, -y) = -f(x, y)  $\Rightarrow$  Centro. V:  $y=0, x=0$ . H:  $x = \pm 1$ .

$y^2 = \frac{2x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$ . Separatrices:  $y = \pm \sqrt{\frac{2x^3}{3} + \frac{2}{x} - \frac{8}{3}} \Big|_{x=3} = \pm 4$ .  
 Por  $(-3, 0)$  y  $(-1, 4)$  pasa la órbita cerrada de  $C = \frac{56}{3}$ .



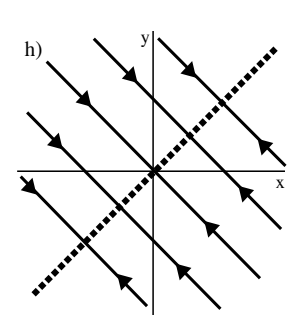
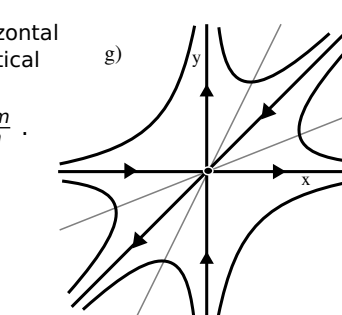
f)  $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 4x - y - 3x^2 \end{cases} \quad \text{Horizontal: } y=4x-3x^2$   
 Vertical:  $y=x/2$ . Exacto.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} : \pm 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , silla.  $\begin{pmatrix} 3/2 \\ -3/4 \end{pmatrix} : \pm 3i$ , centro.  
 $y^2 + xy - 2x^2 + x^3 = C \rightarrow$  separatrices:  
 $y = \frac{x}{2}(-1 \pm \sqrt{9-4x})$  [s]

[Puntos de [s]:  $(\frac{9}{4}, -\frac{9}{8}), (2, 0), (2, -2), (-4, -8), (-4, 12)$ ].  $\mathbf{v}(x, x) = 3x \begin{pmatrix} 1 \\ 1-x \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(x, -2x) = 3x \begin{pmatrix} -1 \\ 2-x \end{pmatrix}$ .

g)  $\begin{cases} x' = x^2 - 2xy \\ y' = y^2 - 2xy \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  no elemental.  $y=2x$  horizontal  
 $y=\frac{x}{2}$  vertical

Exacto.  $x=0$   
 $x^2 y - xy^2 = C \cdot C=0 \rightarrow y=0$ .  $\frac{dy}{dx} \Big|_{y=mx} = \frac{m^2-2m}{1-2m}$ .  
 $y=x$



h)  $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = y - x \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$  infinitos puntos no elementales.

Órbitas:  $y+x=C$ .  $\mathbf{v}(x, y) = (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .



**4.7** a)  $x'' = -4x' - 4x$   $\begin{cases} x' = v \\ v' = -4x - 4v \end{cases}$  lineal.

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = -2$  doble,  $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  nodo 1tgE. H:  $v = -x$ .

b)  $x'' = x(1-x-x')$   $\begin{cases} x' = v \\ v' = -x - x^2 - xv \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ :  $\pm 1$  silla;  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ :  $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ , focoE. Horizontal:  $x=0, v=1-x$ .

$\mathbf{v}(x, x) = \begin{pmatrix} x \\ x-2x^2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(x, -x) = \begin{pmatrix} -x \\ x \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(1, v) = \begin{pmatrix} v \\ -v \end{pmatrix}$ .

c)  $x'' = x - x^3$  Exacta.  $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ .  $x = \pm 1$  mínimos (centros)  $x=0$  máximo (silla)

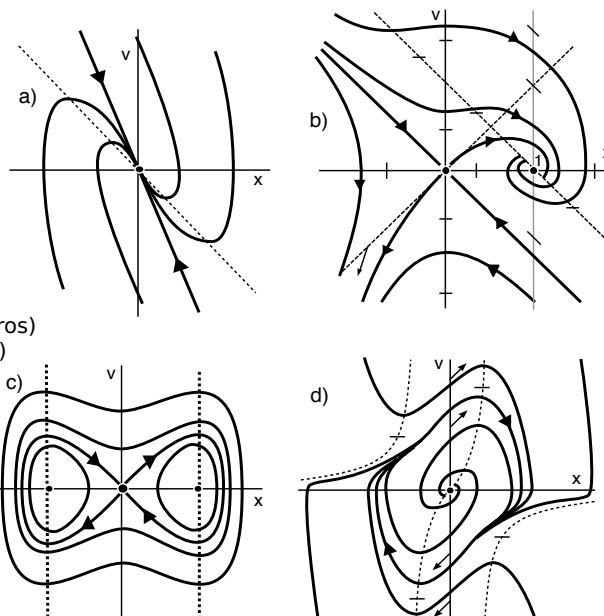
$\begin{cases} x' = v \\ v' = x - x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  con  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ . H:  $x=0, \pm 1$ .

d)  $x'' = (1-x^2)x' - x$   $\begin{cases} x' = v \\ v' = (1-x^2)v - x \end{cases}$

**0** focal único punto crítico. Órbitas no calculables.

Horizontal si  $v = \frac{x}{1-x^2}$ .  $\frac{dv}{dx} = 1 \rightarrow v = -\frac{1}{x}$ .

$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(0, v) = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(\pm 1, v) = \begin{pmatrix} v \\ \mp 1 \end{pmatrix}$ .



**4.8** a)  $\begin{cases} x' = 1 - x + 3y \\ y' = x + y - 1 \end{cases}$  Lineal. Todas las soluciones definidas para todo  $t$ .  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ :  $\pm 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ , silla.

Horizontal:  $y = 1 - x$   
Vertical:  $y = (x - 1)/3$

Órbitas (exacta):  $3y^2 - (x-1)^2 - 2y(x-1) = C$ , hipérbolas.

b)  $\begin{cases} x' = \sin y \\ y' = \sin x \end{cases}$   $\begin{pmatrix} k\pi \\ n\pi \end{pmatrix}$ :  $\lambda^2 = (-1)^{k+m}$   $k+m$  impar, centro.  $k+m$  par, silla.

Exacta.  $\cos y - \cos x = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = C$ .  $y = 2n\pi \pm x$  órbitas rectas.

$\mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$ . Órbitas acotadas  $\Rightarrow$  soluciones definidas  $\forall t$ .

c)  $\begin{cases} x' = 2xy \\ y' = 1 - x^2 + y^2 \end{cases}$   $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{1-x^2}{2xy}$  Bernouilli.  $y^2 + (x-C)^2 = C^2$ .

$\begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  centro de AL y no lineal (circunferencias o simetría).

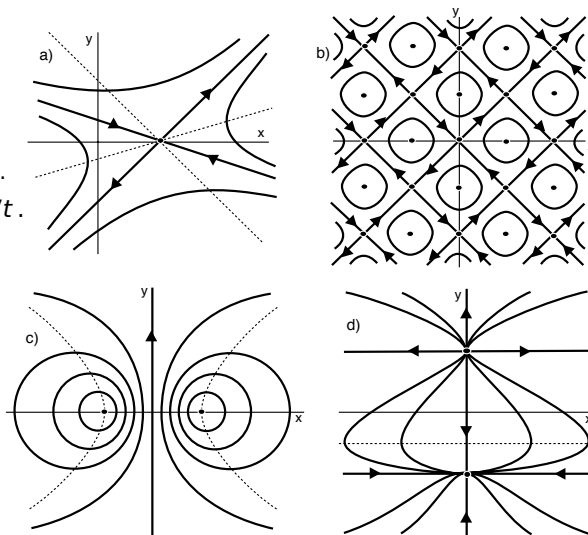
Vertical:  $\frac{x}{y} = 0$ . Horizontal:  $x^2 - y^2 = 1$ .  $\mathbf{v}(0, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1+v^2 \end{pmatrix}$ .

Periódicas definidas  $\forall t$ .  $x=0 \rightarrow y' = 1+y^2 \rightarrow$  explotan.

d)  $\begin{cases} x' = x + 2xy \\ y' = y^2 - 1 \end{cases} = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}, x=0$  órbita.  $= 0 \rightarrow y = \pm 1$  órbitas.

Separable:  $x = C(y-1)^{3/2}(y+1)^{1/2}$ .  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ : 2, 3  $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , nodol.  $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ : -1, -2  $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , nodoE.

No (sí) definidas  $\forall t$  las soluciones asociadas a las órbitas con  $|y| > 1$  ( $|y| \leq 1$ ).

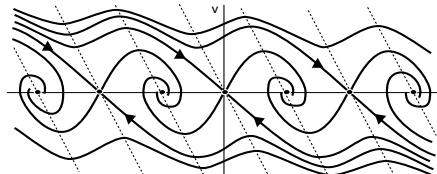


**4.9**  $x'' = \sin(ax+x')$   $\begin{cases} x' = v \\ v' = \sin(ax+v) \end{cases}$ .  $\begin{pmatrix} k\pi/a \\ 0 \end{pmatrix}$  puntos críticos. Si  $k$  par:  $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$ , sillas.

Si  $k$  impar:  $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \rightarrow$  nodos E si  $0 < a < 1/4$   
nodos 1tgE si  $a = 1/4$   
focos estables si  $a > 1/4$

$\alpha=2$   $\begin{pmatrix} n\pi \\ 0 \end{pmatrix}$  sillas con  $\lambda = 2, -1$ ;  $\begin{pmatrix} (2n-1)\pi/2 \\ 0 \end{pmatrix}$  focosE.

Pendiente horizontal si  $v = k\pi - 2x$ .



**4.10**  $x'' = ax - (x')^2$  a)  $\begin{cases} x' = v \\ v' = ax - v^2 \end{cases} \rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm \sqrt{a}$ . Si  $\alpha > 0$  es  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  una silla y  $x \equiv 0$  es I.

Si  $\alpha < 0$  es  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  centro de la aproximación lineal, y en principio  $x \equiv 0$  puede ser AE, EnoA o I.

Como  $g(x, v) = ax - v^2$  es par en  $v$  el centro lo sigue siendo del no lineal y  $x \equiv 0$  es **EnoA**.

Si  $\alpha = 0$  todos los puntos de  $v=0$  son críticos (no elementales). Sus órbitas son:

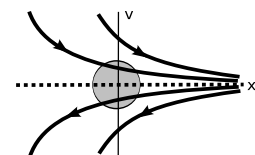
$\frac{dv}{dx} = -v \rightarrow v = Ce^{-x}$ . Esto (y el sentido de las ecuaciones) da el mapa de fases.

En él se observa que  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  (y, por tanto, la solución  $x \equiv 0$ ) es I

[las  $x(t)$  (no constantes) con datos próximos tienden a  $+$  ó  $-\infty$ ].

b) La órbita con  $v(x=0)=1$  es  $v = e^{-x} = \frac{dx}{dt} \rightarrow x = \log(t+K) \xrightarrow{x(1)=0} x = \log t$ . O como no aparece  $x$ :

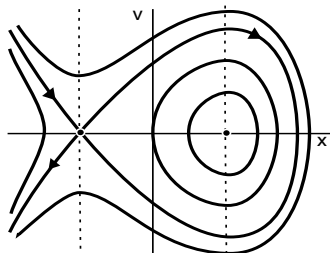
$x' = v \rightarrow v' = -v^2 \rightarrow v = \frac{1}{t+C} \xrightarrow{v(1)=1} v = \frac{1}{t} \rightarrow x = \log t + K \xrightarrow{x(1)=0} x = \log t$ .



**4.11**  $\ddot{x} = 1 - x^2 - k\dot{x}$   $\begin{cases} x' = v \\ v' = 1 - x^2 - kv \end{cases}$   $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 8}}{2}$  silla  $\forall k$ .  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 8}}{2}$  centro si  $k=0$  (exacta), foco E si  $0 < k < 2\sqrt{2}$ , nodo1tgE si  $k=2\sqrt{2}$ , nodo1tgE si  $k > 2\sqrt{2}$ .

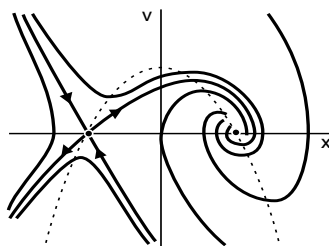
H:  $x = \pm 1$  si  $k=0$ ;  $v = \frac{1-x^2}{k}$  si  $k \neq 0$ .

$k=0$   $\lambda = \pm\sqrt{2}$ ,  $V(x) = \frac{x^3}{3} - x$



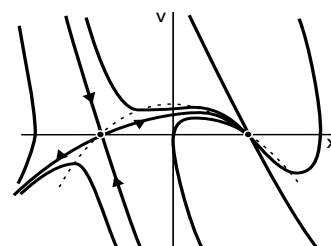
No rozamiento (oscilaciones periódicas)

$k=1$   $\lambda = 1, -2$



Poco rozamiento (oscilaciones amortiguadas)

$k=3$   $\lambda \approx 0.5, 3.5$   $\lambda = -1, -2$



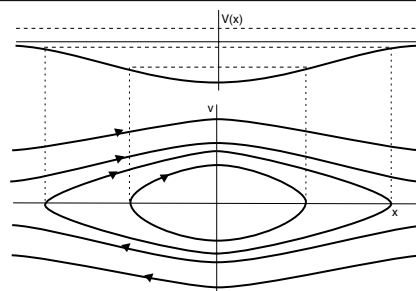
Mucho rozamiento (imposible oscilar)

**4.12**  $\ddot{x} = -x(x^2+9)^{-2}$   $V(x) = \int \frac{x dx}{(x^2+9)^2} = -\frac{1}{2(x^2+9)} \rightarrow v^2 = C + \frac{1}{x^2+9}$ .

Si tiene energía suficiente (si  $C \geq 0$ ) llega hasta  $+\infty$  ó  $-\infty$  (la fuerza de recuperación es pequeña si  $x$  gordo). Si no, oscila.

Órbita con  $v(0) = \frac{1}{3}$ :  $v(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+9}} \rightarrow$  velocidad cuando  $x=4$ :  $v = \frac{1}{5}$ .

Tiempo:  $T = \int_0^4 \sqrt{x^2+9} dx = 10 + \frac{9}{2} \ln 3$ .



**4.13**  $\begin{cases} x' = x+x^2 \\ y' = 2x+y \end{cases}$  a)  $x' = x+x^2$  es autónoma y el dibujo basta para precisar la estabilidad.  $x = \frac{0}{-1}$ , soluciones constantes. Crecen si  $\frac{x}{x} < -1$ . Decrecen si  $-1 < x < 0$ .

La solución con  $x(0) = -2$  y las cercanas definidas  $\forall t \geq 0$  y  $\rightarrow -1$  si  $t \rightarrow \infty \Rightarrow$  AE.

b) Órbitas:  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+x^2} + \frac{2}{1+x} \rightarrow e^{\int [\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}]} = \frac{x}{1+x} \rightarrow y = \frac{Cx}{1+x} + \frac{2x}{1+x} \int \frac{dx}{x} = \frac{x(C+2 \log|x|)}{1+x}$ .

$M = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 1$  doble asociado a  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ : nodo1tgE.  
 $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = 1, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\lambda = -1, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ : silla.

Vertical:  $x=0, -1$  (órbitas).  $v(x, 0) = x \begin{pmatrix} 1+x \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $v(x, 2) = (1+x) \begin{pmatrix} x \\ 2 \end{pmatrix}$ .

$v(x, 1-x) = (1+x) \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$  la separatriz estable se deforma.

Esta separatriz es la órbita de  $C=0$ :  $y = \frac{2x \log|x|}{1+x}$ , pues  $\frac{\log|x|}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow -1} -1$  [L'Hôp].

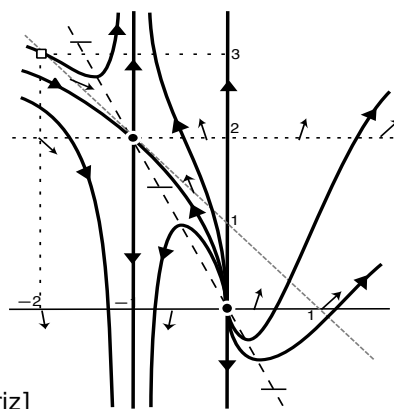
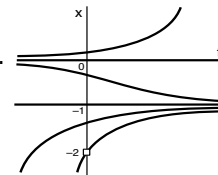
[Su valor en  $x=-2$  es:  $4 \log 2 \approx 4 \times 0.69 < 3$ ].

c)  $x \equiv -1$  órbita por  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow y' = y - 2 \xrightarrow{y(0)=-1} y = 2 - 3e^t$ , o sea,  $x(t) = \begin{pmatrix} 2-3e^t \\ -1 \end{pmatrix}$ .

d)  $x(t) \rightarrow -1$ , según a).  $y(t) \rightarrow \infty$  [la órbita está por encima de la separatriz] [y(t) solución de lineal, definida  $\forall t \geq 0$ ].

a) y d) se pueden responder (más largo) hallando las soluciones de [S]:  $x' = x+x^2$  Bernoulli o separable

$\rightarrow x = \frac{1}{Ce^{-t}-1} \xrightarrow{x(0)=-2} x = \frac{2}{e^{-t}-2} \rightarrow -1$ ;  $y' = y + \frac{4}{e^{-t}-2} \xrightarrow{y(0)=3} y = e^t(3 - 4 \log|2 - e^{-t}|) \rightarrow \infty$ .



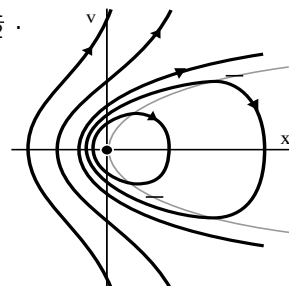
**4.14**  $x'' = (x')^2 - x$   $\begin{cases} x' = v \\ v' = v^2 - x \end{cases}$ ;  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  centro de la AL.  $\frac{dv}{dx} = v - \frac{x}{v} \rightarrow v^2 = Ce^{2x} + x + \frac{1}{2}$ .

Órbitas simétricas respecto a  $v=0 \Rightarrow$  centro del no lineal. Horizontal si  $x = v^2$ .

Inflexión de las órbitas:  $\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{v^4 - v^2 - x}{v^3} = 0 \rightarrow x = \pm v \sqrt{v^2 - 1}$ .  $v(0, v) = \begin{pmatrix} v \\ v^2 \end{pmatrix}$ .

$x(2) = \frac{1}{2}, x'(2) = 1 \xrightarrow{v(x=1/2)=1} v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{x + \frac{1}{2}}, \int \frac{dx}{2\sqrt{x+1/2}} = \sqrt{x + \frac{1}{2}} = \frac{t}{2} + K,$

$x = \left(\frac{t}{2} + K\right)^2 - \frac{1}{2} \xrightarrow{x(2)=1/2}$  Solución:  $x = \frac{t^2}{4} - \frac{1}{2}$ .



**4.15**  $x'' = 2x^3 - 2x$  Exacta. Conviene usar la función potencial  $V(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$ , que tiene un mínimo en  $x=0$  (centro del mapa de fases), y dos máximos en  $x=\pm 1$  (sillas). Es  $V(0)=0$ ,  $V(\pm 1)=\frac{1}{2}$ . Las órbitas vienen dadas por:

$$\frac{v^2}{2} + V(x) = C \rightarrow v = \pm \sqrt{x^4 - 2x^2 + 2C}$$

Con las técnicas generales de mapas de fases:

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = 2x^3 - 2x \end{cases} \rightarrow \text{puntos críticos } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ con } \lambda = \pm i\sqrt{2}, \lambda = \pm 2.$$

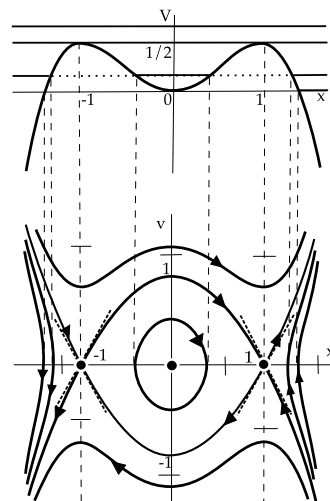
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es centro (simetrías o exactitud) y los vectores de las sillas son  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ .

La pendiente es vertical si  $v=0$  (en toda ecuación) y es horizontal si  $x=0, \pm 1$  (rectas por los puntos).

Las separatrices son las órbitas que pasan por  $(\pm 1, 0) \rightarrow C = \frac{1}{2} \rightarrow v = \pm(1-x^2)$ , parábolas que cortan el eje  $v$  en  $\pm 1$ .

Por los cálculos anteriores y el mapa está claro que es periódica si  $|b| < 1$ .

La órbita asociada a esos datos es  $v = -x^2 = x'$  y la solución de esta autónoma con  $x(0)=0$  es  $x = \text{th } t$ .



**4.16**  $x'' + x + ax^2 + bxv = 0$   $\begin{cases} x' = v \\ v' = -x - ax^2 - bxv \end{cases}$ ;  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  centro de la AL.

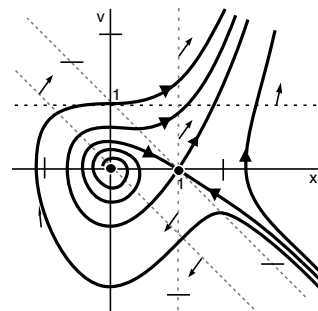
Centro seguro si  $a=b=0$  lineal; si  $b=0$  exacta (y simetría respecto a  $v=0$ ); si  $a=0$  simetría respecto a  $x=0$ . Si  $a, b \neq 0$  no sabemos. Polares no informan.

$$\begin{cases} x' = v \\ v' = -x + x^2 + xv \end{cases}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ centro o foco}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \approx 1.6, -0.6, \text{ silla. } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_{\pm} \end{pmatrix}.$$

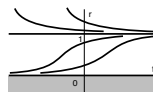
Horizontal:  $x=0, v=1-x$ .  $\mathbf{v}(1, v) = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(x, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(x, -x) = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$ .

$$\text{Polares: } \begin{cases} r' = r^2(c+s)cs \\ \theta' = -1 + r(c+s)c^2 \end{cases} \Rightarrow r \text{ crece si } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi) \cup (\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}).$$

El dibujo sugiere que el origen, y por tanto  $x=0$ , es (foco) inestable.



**4.17** a)  $\begin{cases} x' = y + x(1-x^2-y^2) \\ y' = -x + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$   $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  focol.  $\begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \theta' = -1 \end{cases}$



Si  $t \rightarrow \infty$ , las órbitas tienden a  $r=1$  girando como reloj.  $r=1$  es ciclo límite.

b)  $\begin{cases} x' = -2x \\ y' = x^2 + y^2 - 2y \end{cases}$  Puntos críticos:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ .  $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2x & 2y-2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \nearrow \\ 2 \searrow \end{matrix}$   $\lambda = -2$  doble  $\rightarrow$  nodo estelar I.  $\mathbf{M}$  diagonal  $\lambda = \pm 2$  con  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$  silla.

Campo horizontal:  $x^2 + (y-1)^2 = 1$  (circunferencia). Vertical:  $x=0$  (órbita).  $\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}(x, 2) = \begin{pmatrix} -2x \\ x^2 \end{pmatrix}$  (la separatriz estable se deforma).  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \frac{y^2}{2x} - \frac{x}{2}$  (Riccati sin  $y_p$  sencilla).

$$\begin{cases} r' = -2c^2r - 2s^2r + sr^2 = r(r \sin^2 \theta - 2) \\ \theta' = \frac{1}{r}[cr^2 - 2csr + 2csr] = r \cos \theta \end{cases} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} r - \frac{2}{\cos \theta} \rightarrow r = \frac{K}{\cos \theta} - \frac{2\theta}{\cos \theta}, x = K - 2 \arctan \frac{y}{x}, \boxed{y = x \tan \frac{K-x}{2}}$$

Del sistema en polares deducimos que:  $r$  crece si  $y > 2$ ;  $\theta$  crece si  $x > 0$ . Y de la expresión recuadrada: Todas las órbitas tienen asíntotas verticales y es  $y(0)=0$  excepto si  $K=\pi$  pues entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos \frac{\pi-x}{2}} \sin \frac{\pi-x}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{L'H\acute{o}pital} \cdot 1 = 2 \rightarrow \text{la separatriz estable es } y = x \tan \frac{\pi-x}{2} \text{ [corta el eje en } x = \pm \pi \text{ y sus asíntotas son } x = \pm 2\pi \text{]}.$$

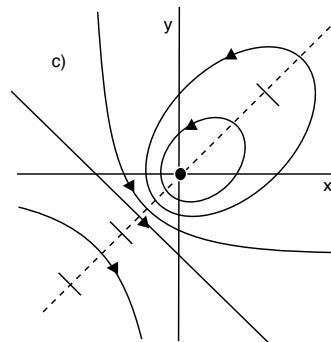
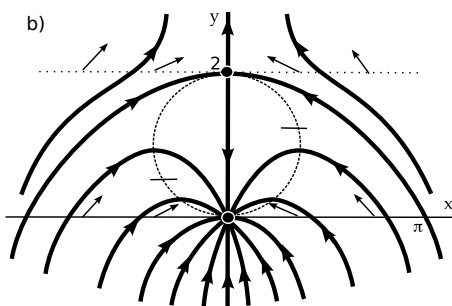
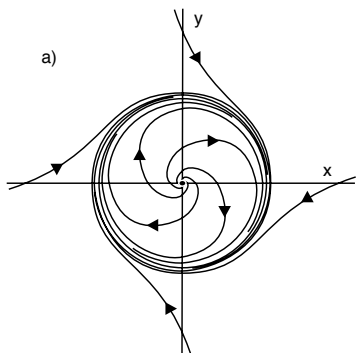
Sorprendentemente salen sencillos los puntos de inflexión:  $\frac{d^2y}{dx^2} = \dots = \frac{(y-2)(x^2+y^2)}{2x^2} \rightarrow y=2$ .

c)  $\begin{cases} x' = x^2 - xy - 2y \\ y' = xy - y^2 + 2x \end{cases}$   $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  centro de la AL  $\begin{cases} r' = r^2(c-s) \\ \theta' = 2 \end{cases}$ ,  $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^2(c-s)}{2} \rightarrow r = \frac{2}{c - \sin \theta - \cos \theta}$ ,  $C\sqrt{x^2+y^2} = 2+x+y$ .

Las órbitas son cónicas:  $C^2(x^2+y^2) = (2+x+y)^2$ .

El centro se conserva: Las órbitas son simétricas respecto a  $y=x$ .  $r$  crece si  $y < x$ .  $\theta$  siempre crece.

$C=0 \rightarrow$  órbita recta. H:  $x = \frac{y^2}{y+2}$ . V:  $y = \frac{x^2}{x+2}$ .  $\mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} x^2 \\ 2x \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(0, y) = \begin{pmatrix} -2y \\ y^2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{v}(x, x) = \begin{pmatrix} -2x \\ 2x \end{pmatrix}$ .



**4.18** a)  $\begin{cases} x' = x \\ y' = x^2 - y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \lambda = \pm 1 \rightarrow \text{Inestable (silla)}.$

b)  $\begin{cases} x' = y + x^3 + xy^2 \\ y' = -x + x^2y + y^3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ centro de la AL. Polares: } \begin{cases} r' = r^3 \\ \theta' = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Inestable (focol del no lineal)}.$

c)  $\begin{cases} x' = x^2 - y \\ y' = xe^y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ centro de AL. } \begin{cases} f(-x, y) = x^2 - y = f(x, y) \\ g(-x, y) = -xe^y = -g(x, y) \end{cases} \Rightarrow \text{Centro también del no lineal. Origen } \mathbf{EnoA}.$

**4.19**  $\begin{cases} x' = y - xy \\ y' = x^2 - x \end{cases} = \begin{cases} y(1-x) \\ -x(1-x) \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ centro de AL. } x=1 \text{ recta de puntos críticos (no elementales)}.$

Órbitas:  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \rightarrow x^2 + y^2 = C. \quad \mathbf{v}(x, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x(x-1) \end{pmatrix}.$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  es estable no A.  $\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}, y \leq 0$  son inestables.  $\begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}, y \geq 0$  son estables no A.

Son periódicas las soluciones asociadas a las circunferencias de radio  $a < 1$ .  
 $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2} \rightarrow x' = \pm(1-x)\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{dx}{dt}, \quad T_a = 2 \int_{-a}^a \frac{dx}{(1-x)\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}.$

[Cuando  $a \rightarrow 0$  el periodo  $T_a$  tiende al de la AL y si  $a \rightarrow 1$  tiende a  $\infty$ ].

