1. Ecuaciones de primer orden

Este capítulo está dedicado a las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden con la variable despejada, es decir, a las ecuaciones

$$[\mathrm{e}]\ y'(t)=f(t,y(t))\text{, o como usualmente se escriben, } [\mathrm{e}]\ \boxed{y'=f(t,y)}$$

(utilizaremos en la teoría la notación $y(t)$, intermedia entre las más usuales $y(x)$ ó $x(t)$, pues la y siempre aparece como variable dependiente y la t como variable independiente).

Primero intentaremos resolver [e]. Esto se consigue en muy escasas ocasiones, incluso para estas ecuaciones de primer orden, las más sencillas de todas. En la sección 1.1 hallaremos la solución de los pocos tipos de **ecuaciones resolubles**: separables, lineales, exactas y otras que se pueden reducir a ellas mediante cambios de variable (homogéneas $y'=f(y/t)$, de la forma $y'=f(at+by)$, de Bernouilli, de Riccati, factores integrantes...).

Dedicaremos el resto del capítulo a obtener información sobre las soluciones de [e] sin necesidad de resolverla. Como cada una de ellas es una función $y(t)$, el conjunto de las soluciones de [e] describirá una familia de curvas en el plano ty (una para cada constante arbitraria C). En la sección 1.2 veremos como hacer un **dibujo aproximado** de estas curvas a partir del 'campo de direcciones', conjunto de segmentos con pendiente proporcionada por la $f(t,y)$. Describiremos, en varios ejemplos, cómo dibujar este campo a través de las llamadas 'isoclinas', cómo hallar posibles rectas solución y localizar los puntos de inflexión..., e introduciremos el concepto de 'curva integral'.

En la sección 1.3 veremos la teoría de existencia y unicidad. Para un problema de valores iniciales (es decir, para una ecuación y un dato inicial dados):

$$[\mathrm{P}]\ \boxed{\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$$

el **teorema de existencia y unicidad** (TEyU) asegurará que si la f y la derivada parcial f_y son continuas en un entorno del punto (t_o,y_0) existirá una única solución $y(t)$ de [P], definida al menos en un pequeño intervalo que contiene a t_o (gráficamente, por ese punto pasará una única curva solución). Si la f no es tan regular, podría no haber solución o existir más de una. Por ejemplo, las funciones $y\equiv 0$ e $y=t^3$ son soluciones distintas de la ecuación $y'=3y^{2/3}$ que cumplen el dato inicial $y(0)=0$ (f_y no es continua en $y=0$). Más complicado será determinar si el máximo intervalo en que dicha solución está definida es finito o infinito (**prolongabilidad**). Es posible, incluso para ecuaciones en las que f tenga muchas derivadas en todo el plano, que una solución no esté definida para todo t. Por ejemplo, la solución única de $y'=y^2$ con $y(-1)=1$, que es $y=-1/t$, sólo está definida en $(-\infty,0)$ [$y=-1/t$ define otra solución distinta para $(0,\infty)$].

En la 1.4 veremos que si f es buena la solución de [P] se parecerá siempre, cerca de t_o, a la de los problemas obtenidos variando un poco el dato inicial y_o. Pero no siempre las soluciones con datos próximos siguen cerca de ella en todo (t_o,∞) [cuando lo hacen, la solución de [P] se dirá **estable**, y **asintóticamente estable** si además la diferencia entre soluciones tiende a 0 cuando $t\to\infty$]. Por ejemplo, las soluciones $y\equiv 0$ e $y=y_o\mathrm{e}^t$ de $y'=y$, con y_o muy pequeño, que son muy próximas cerca de $t=0$, son muy distintas para grandes valores de t. Al estudio de la estabilidad (en general complicado), en especial para las ecuaciones **lineales** (para ellas es fácil), está dedicada principalmente la sección.

La sección 1.5 estudia las llamadas **ecuaciones autónomas** $y'=f(y)$ sobre las que es posible conseguir muchísima información sin conocer su solución: haremos fácilmente su dibujo aproximado hallando sus soluciones constantes y estudiando el signo de $f(y)$, y de él se deducirán inmediatamente, por ejemplo, las propiedades asintóticas de sus soluciones (para ecuaciones no autónomas, de un dibujo no se deduce la estabilidad). La sección nos dará, también, algunas ideas que se generalizarán en el estudio de los sistemas autónomos del capítulo 4.

En la sección 1.6 describiremos los más sencillos **métodos numéricos** programables (Euler, Euler modificado y Runge-Kutta), que (disponiendo de un ordenador) permiten hallar con bastante aproximación los valores numéricos de soluciones de problemas de valores iniciales. Aunque en estos apuntes ocupan un lugar secundario, no olvidemos que, como la mayoría de las ecuaciones diferenciales son no resolubles, será en el futuro necesario acudir a ellos (y a otros más precisos) en muchas ocasiones. Pero antes utilizarlos, convendrá hacerse una idea cualitativa de las soluciones (¿cómo deben ser las soluciones numéricas que nos salgan?, ¿serán estables?, ¿se irán a infinito en tiempo finito?, ...).

1.1 Métodos elementales de resolución

Ecuaciones separables.

Son las que se pueden escribir en la forma [s] $\boxed{y' = \frac{p(t)}{q(y)}}$.

Entonces $\int q(y)dy = \int p(t)dt + C$ y si podemos hallar P y Q primitivas de p y q:

$$Q(y) = P(t) + C\,.$$

Si pudiésemos despejar y de la última ecuación obtendríamos explícitamente la solución general; en caso contrario se diría que la solución viene dada implícitamente. Se dice que una ecuación es resoluble si se puede expresar su solución en términos de primitivas (aunque sean no calculables; según esto, una ecuación separable, siempre es resoluble). Para determinar la constante arbitraria C que aparece en la solución general necesitaríamos imponer una condición inicial.

Ej 1. $\boxed{y' = ty^3}$ $\to \int y^{-3}\,dy = \int t\,dt + C \to -\frac{1}{2}y^{-2} = \frac{1}{2}t^2 + C \to y = \pm[C^* - t^2]^{-1/2}$,

solución general (hemos llamado $C^* = -2C$; a partir de ahora, como se hace normalmente por comodidad en la escritura, no cambiaremos el nombre de las constantes arbitrarias que nos vayan apareciendo: todas ellas serán C).

Hallemos las soluciones que cumplen dos datos iniciales distintos (mientras no estudiemos existencia y unicidad, nos preocuparemos poco de si las funciones obtenidas son las únicas que los satisfacen):

$$y(0)=1 \to 1 = \pm[C^*]^{-1/2} \to C^* = 1 \to y = \left[1 - t^2\right]^{-1/2}$$

pues, evidentemente, sólo nos sirve el signo + de la raíz $\left(y(0)=-1 \to y = -[1-t^2]^{-1/2}\right)$.
Observemos que esta solución sólo está definida en el intervalo $(-1, 1)$.

$$y(0)=0 \to 0 = \pm[C^*]^{-1/2} \text{ que no se satisface para ningún } C^*.$$

Pero es claro que $y \equiv 0$ satisface la ecuación y esa condición inicial. No es raro que en el proceso de cálculo desaparezca alguna solución. El teorema de existencia y unicidad será de mucha ayuda en esos casos.

Ej 2. $\boxed{y' = e^{y-t^2}}$ $\to \int e^{-y}dy = \int e^{-t^2}dt + C \to e^{-y} = C - \int e^{-t^2}dt$ (no calculable) $\to$

$$y = -\ln\left[C - \int e^{-t^2}dt\right].$$

El símbolo $\int$ designa cualquiera de las primitivas del integrando. Si queremos imponer algún dato inicial debemos fijar una de ellas poniendo límites a la integral. Por ejemplo, la solución que cumple $y(0)=7$ es:

$$y = -\ln\left[C - \int_0^t e^{-s^2}ds\right] \to 7 = -\ln[C-0] \to y = -\ln\left[e^{-7} - \int_0^t e^{-s^2}ds\right],$$

función perfectamente definida (no sería demasiado complicado obtener alguna información sobre ella).

Hay ecuaciones que no son de la forma [s], pero que **se convierten en ecuaciones separables mediante un cambio de variable dependiente**. Los dos tipos fácilmente identificables son:

Ecuaciones homogéneas: $\boxed{y'=f\left(\frac{y}{t}\right)}$.

Se convierten en separables haciendo $z=\frac{y}{t}$, pues

$$y=tz \to y'=tz'+z=f(z) \to \frac{z'}{f(z)-z}=\frac{1}{t} \to \int\frac{dz}{f(z)-z}=\ln|t|+C$$

Ej 3. $\boxed{y'=\frac{t^3y+y^4}{t^4}}=\frac{y}{t}+\left(\frac{y}{t}\right)^4 \underset{z=y/t}{\to} tz'+z=z+z^4 \to z^{-3}=C-3\ln|t|=\frac{t^3}{y^3} \to y=\frac{t}{\left[C-3\ln|t|\right]^{1/3}}$.

[Las homogéneas típicas son aquellas en que $f(t,y)$ es un cociente de polinomios homogéneos del mismo grado].

Ecuaciones del tipo: $\boxed{y'=f(at+cy)}$ **, con** a **y** c **constantes**.

Se hace $z=at+cy$ y se tiene: $z'=a+cy'=a+cf(z) \to \int\frac{dz}{a+cf(z)}=t+C$.

Ej 4. $\boxed{y'=(y+2t)^{-2}-1}$ $z=y+2t \to z'=z^{-2}+1 \to \int\frac{z^2dz}{1+z^2}=z-\arctan z=t+C \to$

$y+t-\arctan(y+2t)=C$. No se puede despejar y .

La solución con $y(0)=1$ viene dada implícitamente por $y+t-\arctan(y+2t)=1-\frac{\pi}{4}$.

Ecuaciones lineales.

Son de la forma [l] $\boxed{y'=a(t)y+f(t)}$.

Si $f(t)\equiv 0$ la ecuación se dice **homogénea**: [h] $\boxed{y'=a(t)y}$,
y la sabemos resolver por ser separable:

$$\ln|y|=\int a(t)dt+C \to |y|=e^C e^{\int a(t)dt} \to \boxed{y=C\,e^{\int a(t)dt}}$$

(al sustituir e^C por C hemos incluido las soluciones positivas y negativas del valor absoluto y además la solución $y\equiv 0$ que nos habíamos comido al dividir por y).

Para [l], ecuación **no homogénea**, hallamos su solución sustituyendo la C de la solución general de la homogénea por una función $C(t)$ (es el llamado método de variación de las constantes que es aplicable en situaciones más generales). Llevando nuestra conjetura a [l]:

$$y=C(t)e^{\int a(t)dt} \to C'e^{\int a}+aCe^{\int a}=aCe^{\int a}+f$$
$$\to C(t)=\int C'(t)dt=\int e^{-\int a(t)dt}f(t)dt+C$$

Así pues, la solución **general** de [l] es: $\boxed{y=Ce^{\int a(t)dt}+e^{\int a(t)dt}\int e^{-\int a(t)dt}f(t)dt}$.

Esta es la llamada **fórmula de variación de las constantes**. Nos irán apareciendo en el capítulo 2 otras con el mismo nombre y de aspecto similar (allí las exponenciales serán matrices). Aunque para resolver una ecuación lineal concreta se podría repetir el proceso de variar constantes, es conveniente memorizar esta fórmula ya que se utiliza muy a menudo.

Observemos que la solución general de una ecuación lineal no homogénea resulta ser la **suma de la solución general de la homogénea y de una solución particular de la no homogénea** (lo mismo sucederá en las lineales de mayor orden). Si de alguna forma somos capaces de encontrar una solución cualquiera de [l], nos ahorramos el cálculo de alguna integral.

Si en vez de la solución general de [l] lo que queremos es la **solución particular que satisface** $y(t_o)=y_o$ (aunque podríamos simplemente hallar la solución general e imponer el dato), es inmediato comprobar que :

$$\boxed{y = y_o\, e^{\int_{t_o}^{t} a(t)dt} + e^{\int_{t_o}^{t} a(t)dt} \int_{t_o}^{t} e^{-\int_{t_o}^{s} a(u)du} f(s)\, ds}$$

es la solución del problema de dicho problema de valores iniciales.

Si $a(t)\equiv a$, [l] se llama ecuación lineal con **coeficientes constantes** y su solución general adopta la forma:

$$\boxed{y = C\, e^{at} + e^{at} \int e^{-at} f(t)\, dt} \ .$$

Ej 5. $\boxed{y' = -\frac{y}{t} + e^{t} \quad \text{con} \quad y(1)=1}$.

Para aplicar la fórmula de variación de las constantes, como $e^{\int a}$ aparece 3 veces, empezaremos siempre calculando esta exponencial:

$$e^{\int a} = e^{-\ln t} = e^{\ln t^{-1}} = \frac{1}{t} \;\to\; y = \frac{C}{t} + \frac{1}{t} \int te^{t}dt = \frac{C}{t} + e^{t} - \frac{e^{t}}{t} \xrightarrow{y(1)=1} y = \frac{1}{t} + e^{t} - \frac{e^{t}}{t} \ .$$

O si queremos aplicar la fórmula para el problema de valores iniciales:

$$-\int_1^t \frac{dt}{t} = e^{-\ln t} = \frac{1}{t} \;\to\; y = 1\cdot\frac{1}{t} + \frac{1}{t}\int_1^t se^{s}ds = \frac{1}{t} + e^{t} - \frac{e^{t}}{t} \ .$$

Ej 6. Hallemos la solución general de $\boxed{y' = 2y-6}$.

Hay una solución que salta a la vista: $y_p=3$.

Como la general de la homogénea es Ce^{2t}, la solución general buscada es $y = Ce^{2t}+3$.

O bien, con la fórmula de variación de las constantes: $y = Ce^{2t} - e^{2t}\int 6e^{-2t}dt = Ce^{2t}+3$.

[En el capítulo 2 describiremos cómo buscar soluciones particulares de las ecuaciones lineales de cualquier orden con coeficientes constantes tanteando de forma adecuada a la forma del ‘término independiente’ $f(t)$].

Hay otras **ecuaciones que se pueden reducir a lineales**:

Ecuación de Bernouilli: $\boxed{y' = a(t)y + f(t)y^{p}}$, $p \neq 1$

(p cualquier real, entero o no; si $p=1$, es lineal).

O sea, $y^{-p}y' = a(t)y^{1-p} + f(t)$. Haciendo $\boxed{z = y^{1-p}}$ se convierte en

$z' = (1-p)a(t)z + (1-p)f(t)$, que es lineal y ya hemos visto cómo resolverla.

Ej 7. $\boxed{y' = \frac{2y}{t} + \frac{t}{y}}$ que es de Bernouilli con $p=-1$.

Mejor que recordar las expresiones de arriba escribamos:

$2yy' = \frac{4}{t}y^2 + 2t$, para que aparezcan explícitamente la z y la z'. Haciendo $z=y^2$:

$z' = \frac{4z}{t} + 2t$ lineal, con $e^{\int a} = e^{4\ln t} = t^4 \;\to\; z = Ct^4 + t^4\int \frac{2dt}{t^3} = Ct^4 - t^2 \;\to\; y = \pm t\sqrt{Ct^2-1}$.

$\Big[$También es homogénea: $\xrightarrow{z=y/t} tz' + z = 2z + \frac{1}{z} \to \int \frac{2z}{z^2+1} = \int \frac{2dt}{t} + C \to z^2 = Ct^2 - 1 = \left(\frac{y}{t}\right)^2 \uparrow \Big]$.

Ecuación de **Riccati**: $\boxed{y'=a(t)y+b(t)y^2+f(t)}$.

Todas las ecuaciones anteriores eran resolubles (aunque pudieran aparecer primitivas no calculables). La de Riccati no lo es en general. **Sólo se puede resolver si se conoce una solución particular** y_p **de la ecuación** (y eso casi nunca será posible).

En ese caso, el cambio $\boxed{u=y-y_p}$ la convierte en una Bernouilli con $p=2$:

$$u' = y'-y_p' = [a(t)+2b(t)y_p(t)]u+b(t)u^2 + [a(t)y_p(t)+b(t)y_p^2(t)+f(t)-y_p'(t)]$$
$$u' = \big[a(t)+2b(t)y_p(t)\big]u + b(t)u^2 \quad \text{(ya que } y_p \text{ es solución)},$$

y sabemos que esta ecuación para la u se convierte en lineal con $\boxed{z=y^{-1}}$.

No hay métodos sistemáticos de búsqueda de soluciones particulares de ecuaciones de Riccati. Si en la ecuación aparecen polinomios, se puede intentar tantear con polinomios; si funciones trigonométricas, podemos probar con senos y cosenos... pero lo normal es que estos tanteos no conduzcan a nada.

Ej 8. $\boxed{(1+t^3)\,y'+2ty^2+t^2y+1=0}$.

Es de Riccati ya que hay término en y, término en y^2 y una $f(t)$. Soluciones constantes salta a la vista que no tiene. Lo siguiente que podemos tantear en este caso son las rectas más sencillas $y=At$, pues vemos que quedarán potencias t^3 y constantes:

$$y=At \;\to\; A+At^3+2A^2t^3+At^3+1=0 \;\to\; \text{debe ser a la vez } A+1=0 \text{ y } 2A+2A^2=0\,.$$

Casualmente se dan ambas igualdades si $A=-1$, con lo que $y=-t$ es solución particular.
[Si en vez del último 1 de la ecuación hubiese, por ejemplo, un 2, ya no sería resoluble].

Haciendo $u=y+t$ debe desaparecer el término independiente y convertirse en Bernouilli:

$$u' = y'+1 = -\tfrac{2t}{1+t^3}(u-t)^2-\tfrac{t^2}{1+t^3}(u-t)-\tfrac{1}{1+t^3}+1 = \tfrac{3t^2}{1+t^3}u-\tfrac{2t}{1+t^3}u^2$$

Con $z=u^{-1}$ se llega a la lineal $z' = -\frac{3t^2}{1+t^3}z+\frac{2t}{1+t^3} \to z = \frac{C}{1+t^3}+\frac{1}{1+t^3}\int 2t\,dt = \frac{C+t^2}{1+t^3}$.

Y deshaciendo los cambios obtenemos la solución general: $y = \frac{1}{z}-t = \frac{1-Ct}{C+t^2}$.

Impongamos datos iniciales y veamos cuántas soluciones los satisfacen:

$y(1)=1 \to C=0$, $y = \frac{1}{t^2}$ (podíamos haber impuesto $u(1)=2$ ó $z(1)=\frac{1}{2}$).
$y(-1)=1 \to 1+C=1+C$, toda solución lo cumple (ya estudiaremos existencia y unicidad).

Ecuaciones exactas.

Consideremos una ecuación escrita en la forma: [e] $\boxed{M(t,y)+N(t,y)\,y'=0}$.

[e] es **exacta** si existe una función de dos variables $U(t,y)$ tal que $\boxed{M=U_t\,,\,N=U_y}$

[es decir, [e] lo es si existe función potencial U para el campo vectorial (M,N)].

En ese caso la solución general de [e] es $\boxed{U(t,y)=C}$, pues para cualquier función derivable $y(t)$ definida implícitamente por esta expresión es:

$$0 = \tfrac{d}{dt}U(t,y(t)) = U_t+U_y\,y' = M+N\,y'\ .$$

Un resultado clásico de cálculo asegura que para que U exista debe ser $\boxed{M_y\equiv N_t}$.

Una vez comprobado que U existe se puede hallar como en el ejemplo siguiente.

Ej 9. $\boxed{y' = -\frac{3t^2+6ty^2}{6t^2y+4y^3}}$, o sea, $(3t^2+6ty^2)+(6t^2y+4y^3)y'=0$. Es exacta: $M_y=12ty=N_t$.

La U debe cumplir: $\begin{matrix} U_t=3t^2+6ty^2 \rightarrow U=t^3+3t^2y^2+p(y) \\ U_y=6t^2y+4y^3 \rightarrow U=3t^2y^2+y^4+q(t) \end{matrix} \rightarrow U=t^3+3t^2y^2+y^4$.

Y la solución general en forma implícita es $t^3+3t^2y^2+y^4=C$.

Si [e] no es exacta podríamos intentar encontrar una función $g(t,y)$, **factor integrante de** [e] , tal que $gM+gNy'=0$ **sí sea exacta**. Debería entonces cumplirse:

$$[gM]_y \equiv [gN]_t \text{ , es decir, } [\bullet] \ Ng_t-Mg_y=\left[M_y-N_t\right]g$$

ecuación en derivadas parciales bastante más complicada que la inicial. Encontrar la g es, pues, un problema irresoluble en general, pero posible en ciertos casos especiales. Por ejemplo, si resulta ser $[M_y-N_t]/N$ una **función que sólo depende de** t, [e] admite un factor integrante $g(t)$ que es únicamente **función de la variable** t, pues [•] pasa a ser una ecuación ordinaria (lineal homogénea) que sabemos resolver :

$$g'(t)=\frac{M_y-N_t}{N}g(t) \rightarrow g(t)=e^{\int [M_y-N_t]/N} \quad \text{(eligiendo } C=1 \text{)}.$$

Análogamente se ve que si $[M_y-N_t]/M$ es **función de** y hay factor integrante $g(y)$ que **depende de** y .

Observemos que es mucha casualidad que $[M_y-N_t]$ sea idénticamente cero, o que al dividir esa expresión por N o por M quede una función sólo de una variable; pocas ecuaciones serán, pues, exactas, o admitirán factores integrantes $g(t)$ ó $g(y)$. Podría pensarse en buscar factores integrantes de la forma, por ejemplo, $g(t+y)$ ó $g(ty)$ (se obtendrían entonces para la g ecuaciones ordinarias como antes), pero no merece la pena el esfuerzo, porque, como se ha dicho, lo normal es que una ecuación sea no resoluble.

Ej 10. $\boxed{(t-t^2y)y'-y=0}$ $M=-y$, $N=t-t^2y$, $M_y-N_t=2ty-2 \not\equiv 0$. No es exacta.

Sin embargo, $\frac{M_y-N_t}{N}=-\frac{2}{t} \rightarrow g(t)=e^{-2\ln t}=\frac{1}{t^2} \rightarrow \left(\frac{1}{t}-y\right)y'-\frac{y}{t^2}=0$ es exacta.

Siguiendo como en el ejemplo anterior se tiene la solución general: $\frac{y}{t}-\frac{1}{2}y^2=C$.

Podemos también solucionar esta ecuación (y bastantes más) de una forma diferente: utilizando el hecho de que la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada de la función (si ambas son no nulas). Se observa que es complicada la expresión obtenida al despejar la $dy(t)/dt=y/(t-t^2y)$, pero que en cambio es integrable la ecuación que se obtiene al mirar la t como función de y :

$$\frac{d(t(y))}{dy}=\frac{t}{y}-t^2 \text{ (Bernouilli) } \overset{z=1/t}{\rightarrow} \frac{d(z(y))}{dy}=-\frac{z}{y}+1 \rightarrow z=\frac{C}{y}+\frac{1}{y}\int y\,dy=\frac{C}{y}+\frac{y}{2}=\frac{1}{t} .$$

1.2 Dibujo aproximado de soluciones

Consideremos la ecuación [e] $\boxed{y'=f(t,y)}$.

Cada una de sus soluciones es una función $y(t)$ cuya gráfica tiene en cada uno de sus puntos $(t,y(t))$ la pendiente dada por la conocida función $f(t,y)$. Podemos asociar a cada punto (t,y) del plano un segmento de pendiente $f(t,y)$ (a este conjunto de segmentos se le llama **campo de direcciones** de [e]). Una vez dibujado dicho campo (lo que se puede hacer sin resolver la ecuación), las soluciones de [e] serán las **curvas tangentes en cada punto a los segmentos del campo de direcciones**.

Para dibujar este campo de forma organizada conviene, si es posible, trazar algunas **isoclinas**, es decir, curvas $f(t,y)=K$ en que la pendiente asignada por f es constante (si la f es complicada, también lo serán las isoclinas y no las podremos pintar), para unos cuantos valores de K. En particular intentaremos dibujar la isoclina con $K=0$ (segmentos horizontales, posibles **máximos** y **mínimos** de las soluciones) y la de '$K=\infty$' (segmentos verticales, en esos puntos las $y(t)$ no serán derivables). En el peor de los casos, aunque sea imposible pintar las isoclinas, podremos ir dibujando segmentos del campo en diferentes puntos (t,y).

Se puede dar más información sin necesidad de resolver [e]. Como las zonas de **crecimiento** y **decrecimiento**, regiones con $f(t,y)>0$ y $f(t,y)<0$. O las curvas de puntos de **inflexión**, viendo dónde se anula y'', calculable a partir de ecuación: $y''=f_t(t,y)+f_y(t,y)f(t,y)=0$. Buscaremos **rectas solución** de diferentes formas. El TEyU nos dirá dónde podrán tocarse las soluciones...

Aún cuando [e] sea resoluble, las ideas anteriores suelen dar más datos sobre el dibujo de sus soluciones que la expresión analítica (tal vez complicada, o definida implícitamente, o en función de primitivas,...).

Ej 1. Dibujemos aproximadamente las soluciones de $\boxed{y'=t-2y}$ $=K \to y=\frac{t}{2}-\frac{K}{2}$.

Las isoclinas son, pues, rectas de pendiente $\frac{1}{2}$, es decir, de la forma $y=\frac{t}{2}+b$.

Dibujamos algunas de estas isoclinas rectas para diferentes K y sobre cada una pintamos segmentos de pendiente K:

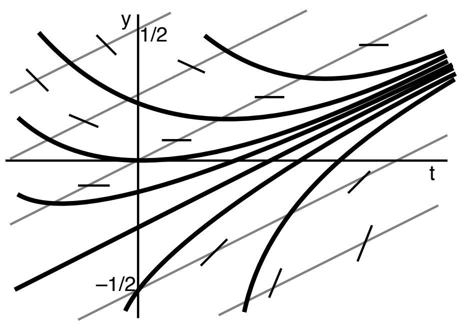
$$K=-1,-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2}$$

(cortan $t=0$ respectivamente en

$$y=\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},0,-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{4}\ ).$$

[O bien tenemos esas rectas dando los valores

$$b=\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},0,-\tfrac{1}{4},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{3}{4}\ ].$$



Para $K=\frac{1}{2}$, la recta y los segmentos sobre ella tienen la misma pendiente y por tanto esa isoclina **es recta solución** de la ecuación (pues, desde luego, es tangente al campo de direcciones en cada punto). Aunque parece que las soluciones no cambian de concavidad, hallamos:

$$y''=1-2y'=1-2t+4y=0 \to y=\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{4}\ , \quad \text{que es la recta solución ya calculada.}$$

Si [e] **tiene rectas solución, aparecerán al hacer** $y''=0$, pues $(mt+b)''=0$.

Basándonos en los segmentos dibujados podemos hacernos una idea de las soluciones. Parece que todas tienden hacia la recta solución. Por ser $t-2y$ una función tan buena, el TEyU nos asegurará que, sin embargo, dos soluciones distintas nunca llegarán a tocarse. Podemos en este caso resolver la ecuación (es lineal) y comprobar (este ejemplo no es muy práctico, más interés tiene el dibujo aproximado de ecuaciones no resolubles). Bastará sumar la solución general de la homogénea a la particular que hemos encontrado:

$$y=\tfrac{t}{2}-\tfrac{1}{4}+Ce^{-2t} \ \text{ (a lo mismo llegaríamos con la fórmula: } y=Ce^{-2t}+e^{-2t}\textstyle\int te^{2t}dt\text{).}$$

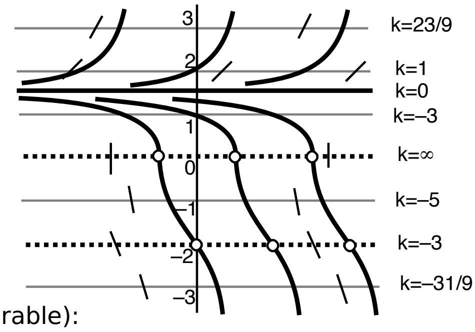
Es inmediato comprobar que **las isoclinas de las ecuaciones de la forma** $y'=f(at+cy)$ (la anterior es una de ellas) siempre son **rectas paralelas** (de la forma $y=-at/c+b$). En particular, esto ocurre para las ecuaciones **autónomas** $y'=f(y)$, donde son las rectas horizontales $y=b$. Veremos en 1.5 que dibujar a grandes rasgos las soluciones de las autónomas será muy fácil, pero si queremos precisar más el dibujo necesitaremos las ideas de esta sección, que son las que usaremos en el siguiente ejemplo:

Ej 2. $\boxed{y'=y-\frac{4}{y^2}}$. Las isoclinas son las rectas: $y=b \;\to\; y'=b-\frac{4}{b^2}=K$.

Si $K=0$ ($b=4^{1/3}\equiv b^*$) tenemos una solución constante. Por encima de ella crecen ($y'>0$) y por debajo decrecen. Sobre $y=0$ ($K=\infty$) las $y(t)$ no serán soluciones (no son derivables).

$$y''=[1+\tfrac{8}{y^3}]y'=\tfrac{(y^3+8)(y^3-4)}{y^3}$$

da la concavidad: las soluciones son $\cup$ en las regiones del plano con $y>b^*$ ó $y\in(-2,0)$, y son $\cap$ si $y\in(0,b^*)$ o si $y<-2$. Además, como debía ocurrir, $y''=0$ nos da la solución $y=b^*$.



La solución es también calculable (ecuación separable):

$$\int \frac{3y^2dy}{y^3-4}=3t+C \to\; y=[4+Ce^{3t}]^{1/3}$$

Esto aporta poco al dibujo aproximado, pero da datos que no se deducen de él: las soluciones con $y>b^*$ están definidas $\forall t$, las soluciones tienden hacia b^* si $t\to-\infty$, ...

Ej 3. $\boxed{y'=\frac{2t-y}{t-y}}$ $=K \;\to\; y=\frac{2-K}{1-K}t$. Son rectas pasando por el origen.

Las isoclinas de toda ecuación homogénea $y'=f(\frac{y}{t})$ **son las rectas** $y=mt$ **, pues** $f(t,mt)=f(m)=K$.

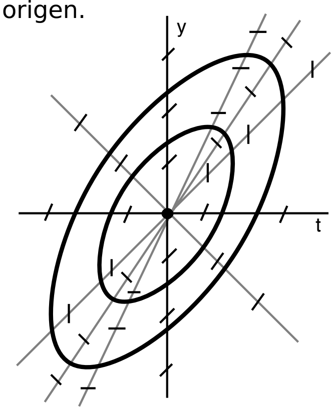
Pintamos diferentes isoclinas para varios K :

$K=0\to y=2t$; $K=1\to t=0$; $K=-1\to y=\frac{3}{2}t$; ...

O bien, como las isoclinas son $y=mt$, es más cómodo dibujar la recta de pendiente m que queramos y trazar sobre ella segmentos de pendiente $K=f(t,mt)=\frac{2-m}{1-m}$:

$m=0\to K=2$; $m=1\to K=\infty$; $m=-1\to K=\frac{3}{2}$; ...

Una recta con $K=f(m)=m$ **sería solución** (aquí no hay). Como no parece haber inflexión, no hallamos y'' .



Las curvas tangentes al campo parecen cerradas o espirales poco abiertas. Resolvemos para salir de dudas. Ecuación homogénea $y'=\left[2-\frac{y}{t}\right]/\left[1-\frac{y}{t}\right]$ o exacta $(2t-y)+(y-t)y'=0$. Por los dos caminos se llega a $y^2-2ty+2t^2=C$. Las soluciones son elipses. Con más propiedad, para cada C esta expresión define **dos soluciones** distintas en $\left(-\sqrt{C},\sqrt{C}\right)$: $y=t+\sqrt{C-t^2}$, $y=t-\sqrt{C-t^2}$ funciones definidas en $\left[-\sqrt{C},\sqrt{C}\right]$ y no derivables en $\pm\sqrt{C}$.

Ampliando el concepto de solución, llamaremos **curva integral** de [e] a una curva tangente en cada punto al campo de direcciones, aunque no esté descrita por una única función $y(t)$ o tenga tangente vertical en algún punto (como las elipses de antes). De forma más precisa, llamemos:

$$\text{[e*]}\quad \boxed{\frac{dt}{dy}=\frac{1}{f(t,y)}}$$

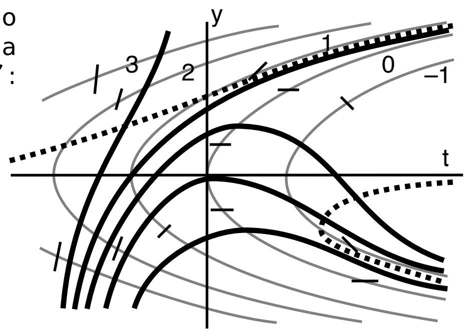
a la ecuación obtenida mirando la t como función de y . **Una curva integral de** [e] **será una curva formada por soluciones** $y(t)$ **de** [e], **por soluciones** $t(y)$ **de** [e*] **o por ambas**. Como la derivada de la función inversa es la inversa de la derivada es claro que [e] y [e*] tienen las mismas curvas integrales, aunque puede haber soluciones de una que no lo sean de la otra. Las elipses del ejemplo son funciones derivables $t(y)$ (soluciones, por tanto de [e*]) cerca de la isoclina $y=t$ de pendiente ∞; cerca de $y=2t$, donde hay buenas soluciones $y(t)$, no se puede poner la t como función derivable de y .

Ej 4. $\boxed{y'=y^2-t}=K \to$ Las isoclinas son parábolas: $t=y^2-K$. Dibujamos algunas.

La de $K=0$ da los máximos de las soluciones (como $y'>0$ si $t<y^2$ e $y'<0$ si $t>y^2$ las soluciones crecen a su izquierda y decrecen a su derecha). Hallando y'':

$y''=2yy'-1=2y^3-2ty-1=0 \;\to\; t=y^2-\frac{1}{2y}$

obtenemos la curva de puntos de inflexión (a puntos en la figura), curva en la que la $t\to+\infty$ $(-\infty)$ cuando $y\to 0^-$ (0^+), que se acerca a $t=y^2$ si $y\to\pm\infty$, y cuyo mínimo local (para la t) se puede calcular. Con estos datos dibujamos las soluciones aproximadas de esta ecuación (que no es resoluble elementalmente).

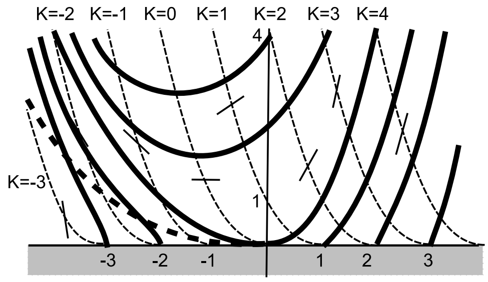


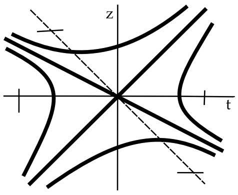
Ej 5. $\boxed{y'=\sqrt{y}+t}=K \to$ Isoclinas: $t=K-\sqrt{y}$ $\big[$o rama decreciente de $y=(t-K)^2\big]$.

Ecuación definida sólo en el semiplano $y\geq 0$. Las soluciones crecen si $t\geq-\sqrt{y}$ y decrecen en el resto de $y\geq 0$.

$$y''=\frac{\sqrt{y}+t}{2\sqrt{y}}+1 \;\to\; t=-3\sqrt{y} \;\text{ inflexión.}$$

La ecuación no es de ninguno de los tipos resolubles de 1.1, pero hacemos $z=\sqrt{y}$ a ver qué pasa (en general los 'cambios ingeniosos' no nos llevan a nada, pero aquí sí):





$z=\sqrt{y} \to z'=\frac{z+t}{2z}$ (ecuación homogénea) $\xrightarrow{u=z/t} (u-1)^2(2u+1)=\frac{C}{t^3}$

$\to (z-t)^2(2z+t)=\boxed{C=\big(t-\sqrt{y}\big)^2\big(t+2\sqrt{y}\big)}=0 \;\to\; \begin{array}{l} t=\sqrt{y} \\ t=-2\sqrt{y}\end{array}$

De aquí sale una solución que pasa por $(0,0)$: $y=\begin{cases} t^2, & t\geq 0 \\ t^2/4, & t\leq 0\end{cases}$.

Los dibujos aproximados de ecuaciones homogéneas son sencillos:

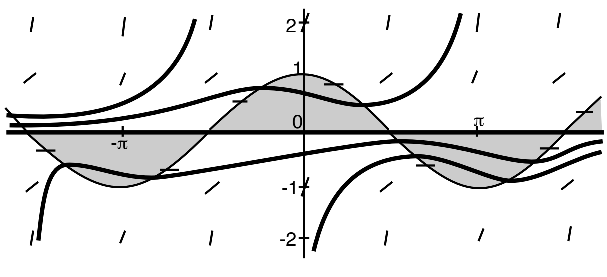
$f(t,mt)=\frac{m+1}{2m} \;\to\; m=-1$ horizontal, $m=0$ vertical, $\frac{m+1}{2m}=m \;\to\; m=1,-\frac{1}{2}$ soluciones.

Como la y es el cuadrado de la z, el dibujo de la izquierda corrobora el dibujo de arriba.

En el último ejemplo las isoclinas van a ser complicadas, y tendremos que dibujar segmentos en diferentes puntos del plano tras hallar su $f(t,y)$ organizándonos de otra forma:

Ej 6. $\boxed{y'=y^2-(\cos t)y}$.

La única isoclina sencilla es la de $K=0$ que da la solución $y=0$ y la curva $y=\cos t$. Las soluciones decrecen si $y(y-\cos t)<0$, o sea, en las zonas grises (y es $y'>0$ fuera). Haciendo $y''=0$ se obtiene una curva difícil de dibujar (y, claro, la recta solución $y=0$).



Parece adecuado dibujar segmentos sobre las rectas $t=\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$:

$$f\Big(\tfrac{[2k-1]\pi}{2},y\Big)=y^2 \;;\; f(2k\pi,y)=y^2-y \;;\; f\big([2k-1]\pi,y\big)=y^2+y\,.$$

Con todo lo anterior podemos ya esquematizar las soluciones.

La ecuación es de Bernouilli y resoluble:

$$y=z^{-1}\to z'=(\cos t)z-1\,,\; z=e^{\operatorname{sen} t}\Big(C-\int e^{-\operatorname{sen} t}dt\Big),\; y=e^{-\operatorname{sen} t}\Big(C-\int e^{-\operatorname{sen} t}dt\Big)^{-1},$$

pero, al ser la primitiva no calculable, es complicado obtener información a partir de esta solución sobre el dibujo.

Seguiremos haciendo dibujos aproximados en las secciones posteriores.

1.3 Existencia, unicidad, prolongabilidad

Consideremos el problema de valores iniciales [P] $\boxed{\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$.

Supondremos la f definida en un determinado subconjunto $D\subset\mathbf{R}^2$ y que $(t_o,y_o)\in D$.

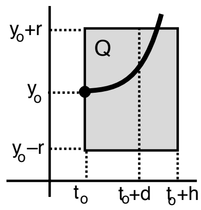
Precisamos con detalle la definición imprecisa de solución utilizada hasta ahora:

> Una **solución** de [P] es una función $y(t)$ **derivable en un intervalo** $I\ni t_o$ tal que $y(t_o)=y_o$ y tal que para todo $t\in I$ se cumple que $(t,y(t))\in D$ e $y'(t)=f(t,y(t))$.

Nuestro objetivo es estudiar en qué condiciones hay una única solución de [P]. El siguiente teorema (de **existencia y unicidad**, cuyas hipótesis serán, casi siempre, comprobables a simple vista y cuya larga demostración describiremos más adelante sin demasiados detalles) nos lo va a precisar para casi todas las ecuaciones que consideremos y para casi todos los datos iniciales que impongamos:

Teor 1. Sean f y f_y continuas en $Q=[t_o,t_o+h]\times[y_o-r,y_o+r]$. Entonces el problema [P] posee una única solución definida al menos en un intervalo $I=[t_o,t_o+d]$ con $d\le h$.

(o lo mismo para la izquierda de t_o , sustituyendo $[t_o,t_o+h]$ y $[t_o,t_o+d]$ por $[t_o-h,t_o]$ y $[t_o-d,t_o]$)



Observemos que el teorema asegura que existe solución única definida al menos en un intervalo (lo que se llama solución **local**) aunque este intervalo podría ser pequeño (aún menor que la base $[t_o,t_o+h]$ del Q en el que es continua f). Al final de la sección nos preocuparemos de cuál es el intervalo máximo de definición de las soluciones. Uniendo los resultados a izquierda y derecha, podemos abreviar el teorema y escribir el resultado que aplicaremos en la práctica casi todas las veces:

TEyU. f y f_y continuas en un entorno de (t_o,y_o) $\Rightarrow$ [P] posee solución única definida al menos en un intervalo que contiene a t_o .

Mucho más larga es la demostración (que no daremos, puesto que exige resultados aún más avanzados de matemáticas) del teorema siguiente (de **existencia**), que asegura que si a f se le exige sólo la continuidad se garantiza que hay solución aunque puede fallar la unicidad:

TE. f continua en un entorno de (t_o,y_o) $\Rightarrow$ tiene [P] al menos una solución en un entorno de t_o .

Veamos varios ejemplos que ilustren lo que dicen (y lo que no dicen) los teoremas anteriores:

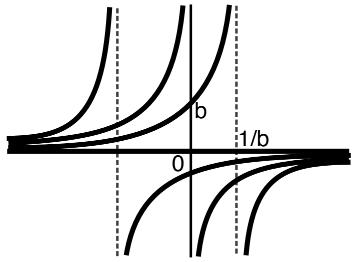
Ej 1. El problema $\boxed{\begin{cases} y'=\operatorname{sen}\left(t-\ln[y^2+e^t]\right) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ tiene solución única (que no sabremos calcular) para todo t_o y todo y_o pues f y f_y son continuas en un entorno de (t_o,y_o) (claramente son continuas en todo $\mathbf{R}^2$).

Ej 2. $\boxed{y'=\frac{y^2-1}{t}\,,\ y(1)=-1}$ tiene solución única local, al ser f , f_y continuas en un entorno de $(1,-1)$. Resolvemos e imponemos el dato para ver cuál es. Es separable (o Riccati):

$$\int\frac{2dy}{y^2-1}=\ln\frac{y-1}{y+1}=2\ln t+C\ \to\ \frac{y-1}{y+1}=Ct^2\ \to\ y=\frac{1+Ct^2}{1-Ct^2}\ \xrightarrow{y(1)=-1}\ -1+C=1+C$$

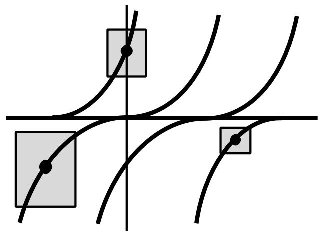
¡Ningún C lo satisface! Pero hay una según el TEyU (sin él pensaríamos que no). Se ve que $y\equiv-1$ es la solución perdida en el cálculo. Observemos que esta solución cumple $y(0)=-1$, a pesar de ser f discontinua en $(0,-1)$ [en rigor, $y\equiv-1$ no es solución en $t=0$ pues f no existe ahí, pero podríamos definir $f(0,y)=0$]. Los teoremas son sólo **condiciones suficientes**: puede ser f muy mala y haber solución, e incluso ser única. Podemos observar también que todas las soluciones (excepto $y\equiv-1$) cumplen $y(0)=1$.

Ej 3. $\boxed{\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=b \end{cases}}$ tiene solución única local que es $y=\frac{b}{1-bt}$ ($y=\frac{1}{C-t}$ + dato inicial).



El $Q=[0,h]\times[b-r,b+r]$ del teorema 1 puede ser lo gordo que queramos [pues f y f_y son continuas en todo $\mathbf{R}^2$]. Sin embargo el d resultante, para $b>0$, puede ser muy pequeño [por grande que sea h], pues la solución está sólo definida en $\left(-\infty,\frac{1}{b}\right)$ [la expresión de la solución es válida $\forall t\neq\frac{1}{b}$, pero para $t>\frac{1}{b}$ define una solución distinta, definida en $\left(\frac{1}{b},\infty\right)$]. Si nos fijamos en los $b<0$ tenemos algo totalmente similar: las soluciones sólo llegan a la izquierda hasta la asíntota de $\frac{1}{b}$. Sólo si $b=0$ se tiene una solución definida $\forall t$: la $y\equiv 0$. Recordemos que el teorema solamente garantiza solución única **local**.

Ej 4. $\boxed{\begin{cases} y'=3y^{2/3} \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ $f=3y^{2/3}$ continua en todo $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ existe solución $\forall(t_o,y_o)$ por el TE. $f_y=2y^{-1/3}$ continua en $\mathbf{R}^2-\{y=0\} \Rightarrow$ la solución es única si $y_o\neq 0$.



Cuando $y_o=0$, al no estar definida f_y, **puede** fallar la unicidad. Resolviendo e imponiendo $y(t_o)=0$ obtenemos $y=(t-t_o)^3$. Como puede haberla (sin el teorema no se nos ocurriría), buscamos otra solución con ese dato y la hallamos sin dificultad: $y\equiv 0$ también lo cumple (a las soluciones formadas por puntos en los que falla la unicidad (como esta $y\equiv 0$) se les llama soluciones singulares y no suelen estar recogidas por las soluciones generales).

Ej 5. $\boxed{\begin{cases} y'=3\sqrt{t}\,y^2 \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ (f no existe si $t<0$). f y $f_y=6\sqrt{t}\,y$ continuas en $\{t\geq 0\}$.

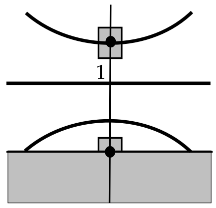
Existe solución $\forall t_o\geq 0$. Para $t_o>0$ esto se deduce del TEyU (pues f y f_y son continuas en todo un entorno de (t_o,y_o), pero para los puntos de la recta $t=0$ hay que utilizar el teorema 1, pues sólo son continuas en un **entorno a la derecha** de los puntos $(0,y_o)$. La ecuación es resoluble (separable) y se puede ver cuáles son estas soluciones:

$$-\frac{1}{y}=2t^{3/2}+C \;\rightarrow\; y=\frac{1}{C-2t^{3/2}}\;,\; y(0)=y_o \;\rightarrow\; y=\frac{y_o}{1-2y_o t^{3/2}}\;.$$

[Que conste que los TEyU no exigen nada a la f_t (en este ejemplo es discontinua en $t=0$ pero no importa)]. [Observemos que, como en el Ej 3, aunque son continuas f y f_y en todo el semiplano $\{t\geq 0\}$, las soluciones no están definidas en todo $[0,\infty)$, pues sólo llegan (salvo la $y\equiv 0$) hasta la asíntota vertical de $t=1/(2y_o)^{2/3}$].

Ej 6. $\boxed{\begin{cases} y'=t(\sqrt{y}-1) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ f es continua en $\{y\geq 0\}$ y $f_y=\frac{t}{2\sqrt{y}}$ en $\{y>0\}$; f no existe si $\{y<0\}$.

Para $y_o>0$ el TEyU asegura solución única, pero para $y_o=0$ no dice nada. El TE tampoco nos informa sobre si al menos existe solución aunque no sea única en $(0,0)$, pues exige que f sea continua en **todo un entorno** del punto. No basta que f sea continua en el punto, o que lo sea (como sucede aquí) en un rectángulo por encima del punto (sí basta que lo sea en el entorno a la derecha o la izquierda del teorema 1, pero no es el caso). Para ver qué ocurre en $(0,0)$ es suficiente, en este ejemplo, analizar el signo de la y':



$y'=0 \rightarrow y=1$ (recta solución)
$y'>0$ (crece) en $(0,\infty)\times(1,\infty)$ o en $(-\infty,0)\times(0,1)$
$y'<0$ (decrece) en $(0,\infty)\times(0,1)$ o en $(-\infty,0)\times(1,\infty)$

Por $(0,0)$, por tanto, no puede pasar ninguna solución.
($y\equiv 0$ aquí no satisface, claramente, la ecuación).

[Comprobemos otra vez lo mentirosas que pueden ser las soluciones generales y los errores que se cometen si uno se fía de ellas. La ecuación es separable. Integrándola se obtiene:

$$\sqrt{y}+\log\left|\sqrt{y}-1\right|=\tfrac{1}{4}t^2+C$$

Parecería que no hay solución con $y(0)=1$ (es la única $y\equiv 1$ perdida) y que con $y(0)=0$ $\rightarrow C=0$ hay una única solución (y acabamos de ver que no existe; la expresión de la solución con $C=0$ se satisfará sólo si $y=t=0$].

Veamos qué conclusiones se pueden sacar de aplicar los TEyU a la

$$\text{‘ecuación equivalente’} \quad [e^*] \ \frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(t,y)} \, .$$

Las **curvas integrales** eran soluciones tanto de [e] $y' = f(t,y)$, como de [e*]. El TEyU habla de existencia y unicidad de **soluciones**. Si por un punto pasa una única solución $y(t)$ de [e] evidentemente pasa también una única curva integral. Pero por un (t_o, y_o) tal que en un entorno suyo f ó $\partial f/\partial y$ no sean continuas pero tal que $1/f$ y $\partial(1/f)/\partial t$ sí lo sean pasará una única solución $t(y)$ de [e*] y, por tanto, una única curva integral (que en muchas ocasiones no será solución de [e]). **Sólo puede pasar más de una curva integral por los puntos en que falle el TEyU tanto para** [e] **como para** [e*] (y en esos puntos no se sabe).

En ocasiones, **el análisis de** [e*]**, informa también sobre la existencia o no de soluciones de nuestra ecuación inicial** [e], utilizando argumentos como los de los siguientes ejemplos.

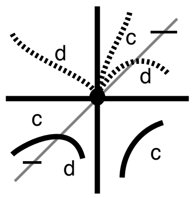
Ej 7. [e] $\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t^2+y^2}}$ cuya equivalente es [e*] $\frac{dt}{dy} = t^2+y^2$ (ni una ni otra son resolubles).

El TEyU asegura que hay única solución $y(t)$ de [e] con $y(t_o)=y_o \ \forall (t_o,y_o) \neq (0,0)$. Por $(0,0)$, al no tener problemas de unicidad la equivalente, pasa una **única curva integral**.

Como la solución $t(y)$ de [e*] que pasa por $(0,0)$ es creciente y su pendiente $t'(0)=0$ esta curva integral será de hecho también una función $y(t)$ pero con derivada ∞ (no es derivable en $t=0$). Concluimos que [e] **no tiene solución con el dato** $y(0)=0$.

Ej 8. Sea [e] $\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{y(y-t)}{t}}$ $\rightarrow$ [e*] $\frac{dt}{dy} = \frac{t}{y(y-t)}$. Su solución es (Bernouilli): $y = \frac{e^t}{C - \int t^{-1} e^t dt}$.

El TEyU dice que hay **única solución** $y(t)$ de [e] con $y(t_o)=y_o$ para todo $t_o \neq 0$ y todo y_o, pero no precisa si hay ninguna, una, varias o infinitas satisfaciendo $y(0)=y_o$.



Por su parte [e*] tiene única solución $t(y)$ con $t(y_o)=t_o$ si $y_o \neq 0$ y si $y_o \neq t_o$. En particular hay única $t(y)$ con $t(y_o)=0$, $y_o \neq 0$. Por tanto, **por cada punto, salvo tal vez por** $(0,0)$**, pasa una única curva integral**. Por $(0,0)$ pasan al menos 2: $y=0$ y $t=0$ (soluciones a ojo de [e] y de [e*]). Como por $(0,y_o)$, $y_o \neq 0$, sólo pasa la curva $t=0$ (que no es solución de [e]) **no hay solución** $y(t)$ **por esos puntos**. Pero los teoremas no aclaran qué sucede en $(0,0)$. Necesitamos más información. La solución e isoclinas son complicadas. Pero basta analizar crecimiento y decrecimiento para garantizar que **pasan infinitas curvas por** $(0,0)$ [las trazadas a puntos], pero no podemos decir si son soluciones (podrían tener ahí pendiente infinita).

[De la solución se deduce (es difícil) que $y' \to \infty$ si $t \to 0$, y así la única solución $y(t)$ por el origen es $y \equiv 0$, a pesar de no ser la f ni continua (no estar definida) en ese punto].

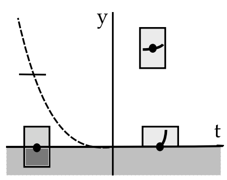
Ej 9. Sea [e] $\boxed{\frac{dy}{dt} = e^{y^{1/3}}}$. $f_y = \frac{1}{3} y^{-2/3} e^{y^{1/3}}$. Para su equivalente [e*] $\frac{dt}{dy} = e^{-y^{1/3}}$ es $\left(\frac{1}{f}\right)_t = 0$.

[e] tiene solución en todo $\mathbf{R}^2$, única en $\mathbf{R}^2 - \{y=0\}$. Como hay solución única $t(y)$ en todo $\mathbf{R}^2$, en $y=0$ la solución es también única. A diferencia del ejemplo 4, aunque fallaba el TEyU (no el de existencia) en $y=0$, hay solución única ahí. Y a diferencia de los ejemplos anteriores el considerar la [e*] nos ha dado unicidad y no inexistencia.

Ej 10. Estudiemos la unicidad de los seis ejemplos dibujados aproximadamente en 1.2.

1, 4 y 6, no presentan problemas: solución $y(t)$ única para cualquier $(t_o, y_o) \in \mathbf{R}^2$.

No hay solución $y(t)$ para 2 por $(t_o, 0)$ y para 3 por (t_o, t_o), $t_o \neq 0$, por razones como las del ejemplo 7: por esos puntos pasa una única curva integral de pendiente vertical. Para 3, por $(0,0)$, donde ni f ni $1/f$ eran continuas, no pasa ninguna curva integral.



Para 5 hay problemas en $(t_o, 0)$ (no podemos aplicar ni el TE), pero [e*] tiene solución única $t(y)$ a la derecha de cada $(t_o, 0)$, $t_o \neq 0$ (con pendiente $\neq 0$) y, por tanto, hay solución única $y(t)$ (a la derecha o izquierda) de ellos. De $(0,0)$ los TEyU no informan, pero del dibujo y solución de $z(t)$ se puede concluir que la única solución que pasa por el origen es la allí calculada.

Avancemos hacia el **resumen de la demostración del teorema 1**. En las hipótesis del enunciado de un teorema previo que veremos aparece el término que definimos aquí:

Diremos que una $f(t,y)$ es **lipschitziana respecto de la** y en $D\subset\mathbf{R}^2$ si existe L (constante de Lipschitz) tal que $|f(t,y)-f(t,y^*)|\le L|y-y^*|$ para todo $(t,y),(t,y^*)\in D$.

Pedir que una f sea lipschitziana es pedir algo menos que pedir que f y f_y sean continuas:

f y f_y continuas en $Q\subset\mathbf{R}^2$ compacto $\Rightarrow$ f lipschitziana respecto de la y en Q

Sean $(t,y),(t,y^*)\in Q$. Aplicando el teorema del valor medio a f, vista como función de y se tiene que $\exists c\in(y,y^*)$ con: $f(t,y)-f(t,y^*)=f_y(t,c)[y-y^*]\le L|y-y^*|$, donde L es el valor máximo de $|f_y|$ en Q, que existe por ser función continua en el compacto Q.

[$\Leftarrow$ **no es cierta** (aunque casi todas las f lipschitzianas que aparezcan tengan f_y continua):
$f(t,y)=|y|$ es lipschitziana en $\mathbf{R}^2$ pues $\big||y|-|y^*|\big|\le|y-y^*|\ \forall(t,y),(t,y^*)\in\mathbf{R}^2$ ($L=1$),
pero no existe f_y cuando $y=0$].

Para probar el teorema definimos el siguiente **operador** T (una función que transforma funciones y en funciones Ty):

$$\boxed{Ty(t)=y_o+\int_{t_o}^{t}f(s,y(s))\,ds}$$

Del teorema fundamental del cálculo integral se deduce fácilmente que:

$$\boxed{y \text{ es solución de [P]} \iff y(t)=y_o+\int_{t_o}^{t}f(s,y(s))\,ds \iff Ty=y},$$

o, con otras palabras, si y es **punto fijo** del operador T. En una rama de las matemáticas, el análisis funcional, se prueban varios teoremas de punto fijo. Por ejemplo, el llamado **teorema de la aplicación contractiva** para un espacio E de **Banach** (espacio vectorial en el que hay definida una norma respecto de la cual es completo, es decir, que toda sucesión de Cauchy con esa norma tiene límite que pertenece a E (**R**, por ejemplo, lo es)):

Sea $T:E\to E$, E de Banach, tal que $\forall y,y^*\in E$ es $\|Ty-Ty^*\|\le\alpha\|y-y^*\|$, con $0\le\alpha<1$ $\Rightarrow$ existe un único punto fijo de T.

A partir de cualquier $y_0\in E$ definimos la sucesión: $y_1=Ty_0$, $y_2=Ty_1$, ..., $y_{n+1}=Ty_n$, ...

Probamos que $\{y_n\}$ es de Cauchy:

$$\|y_n-y_{n+1}\|=\|Ty_{n-1}-Ty_n\|\le\alpha\|y_{n-1}-y_n\|\le\alpha^2\|y_{n-2}-y_{n-1}\|\le\cdots$$
$$\Rightarrow\ \|y_n-y_{n+1}\|\le\alpha^n\|y_0-y_1\|\ \Rightarrow$$
$$\|y_n-y_{n+k}\|=\|y_n-y_{n+1}+y_{n+1}-\cdots-y_{n+k-1}+y_{n+k-1}-y_{n+k}\|$$
$$\le\|y_n-y_{n+1}\|+\cdots+\|y_{n+k-1}-y_{n+k}\|\le[\alpha^n+\alpha^{n+1}+\cdots+\alpha^{n+k-1}]\|y_0-y_1\|$$
$$=\tfrac{\alpha^n-\alpha^{n+k}}{1-\alpha}\|y_0-y_1\|\le\tfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\|y_0-y_1\|\le\epsilon\ \ \forall\epsilon \text{ dado, si } n \text{ suficientemente grande.}$$

Puesto que E es completo $\{y_n\}\to y\in E$. Veamos que y es el punto fijo buscado.

Como T es continuo ($\|Ty-Ty^*\|$ es lo pequeño que queramos si $\|y-y^*\|$ es pequeño):

$$T(y)=T(\lim_{n\to\infty}y_n)=\lim_{n\to\infty}T(y_n)=\lim_{n\to\infty}y_{n+1}=y$$

Falta ver que y es único. Si y^* también cumple $Ty^*=y^*$ entonces:

$$\|y-y^*\|=\|Ty-Ty^*\|\le\alpha\|y-y^*\|\ \to\ y^*=y$$

$E=\{y:I\to\mathbf{R}/y \text{ continua}\}$ es un espacio de Banach con la norma $\|y\|=\text{máx}\{|y(t)|:t\in I\}$

E es espacio vectorial (combinaciones lineales de continuas son continuas).

$\|y\|$ tiene las propiedades de una norma. Además:

$\{y_n\}$ de Cauchy $\to$ $\{y_n(t)\}$ de Cauchy $\forall t\Rightarrow$ $\{y_n(t)\}\to y(t)\,\forall t$

$\Rightarrow$ en norma, $\{y_n\}\to y$ continua (el límite es uniforme).

Para demostrar un teorema de existencia y unicidad bastará determinar un intervalo I que defina un E de estos, de modo que el operador T de arriba transforme funciones de E en funciones de E y tal que T sea contractivo.

Teor 1*. f continua y lipschitziana respecto de la y en $Q=[t_o,t_o+h]\times[y_o-r,y_o+r] \Rightarrow$ [P] posee solución única definida al menos en $I=[t_o,t_o+d]$, con $d=\text{mín}\{h,\frac{r}{M},\frac{1}{2L}\}$, siendo M el máximo de $|f(t,y)|$ en Q y L la constante de Lipschitz.

[Probado este teorema queda probado el 1 pues vimos que sus hipótesis implican las del 1*; por la misma razón este teorema es más fuerte que aquel (se pide menos a la f) y es aplicable en (pocos) casos en que el 1 no funciona].

El I que define E es $I=[t_o,t_o+d]$. Probemos primero que la T de arriba es contractiva. Si $y,y^*\in E$ entonces:

$$|(Ty-Ty^*)(t)| \leq \int_{t_o}^{t}|f(s,y(s))-f(s,y^*(s))|\,ds \leq L\int_{t_o}^{t}|y(s)-y^*(s)|\,ds$$

$$\leq L\int_{t_o}^{t}\|y-y^*\|\,ds \leq Ld\|y-y^*\| \leq \tfrac{1}{2}\|y-y^*\| \quad \forall t\in I$$

$$\Rightarrow \|(Ty-Ty^*)(t)\| = \text{máx}\{|(Ty-Ty^*)(t) : t\in I\} \leq \tfrac{1}{2}\|y-y^*\|$$

Como la f sólo la suponemos continua en Q, dada $y\in E$ en principio Ty podría no ser continua. Pero si la gráfica de y se mueve en $[t_o,t_o+d]\times[y_o-r,y_o+r]$ sí podemos asegurar que lo es pues entonces $f(t,y(t))$ es continua y Ty, primitiva de continua, también lo será. Además Ty tiene también su gráfica contenida en Q, pues para todo $t\in I$ se tiene que:

$$|Ty(t)-y_o| \leq \int_{t_o}^{t}|f(s,y(s))|\,ds \leq M\int_{t_o}^{t}ds \leq M(t-t_o) \leq Md \leq r \quad \text{si} \quad t\in I\,,$$

es decir, $(t,Ty(t))\in Q$

Así pues, son elementos de E las funciones de la sucesión $\{y_n\}$ obtenida aplicando indefinidamente T a la función constante $y_o(t)\equiv y_o$, es decir, la sucesión de funciones (llamadas **aproximaciones sucesivas de Picard**):

$$y_o(t)\equiv y_o\,,\quad y_1(t)=y_o+\int_{t_o}^{t}f(s,y_o)\,ds\,,\quad y_2(t)=y_o+\int_{t_o}^{t}f(s,y_1(s))\,ds\,,\ \ldots$$

Esta $\{y_n\}$, entonces, converge hacia el único punto fijo de T en E, es decir, hacia la solución única de [P].

Ej 11. $\boxed{y'=|t^2-7y|}$ f continua en todo $\mathbf{R}^2 \Rightarrow$ existe solución para cualquier dato inicial.

f_y es continua si $7y\neq t^2$. El teorema 1 asegura la unicidad $\forall(t_o,y_o)$ con $7y_o\neq t_o^2$. Para las funciones definidas a trozos, como el valor absoluto, el teorema adecuado no es el 1, sino el 1*. Veamos que f es lipschitziana:

$$|f(t,y)-f(t,y^*)| = \Big|\,|t^2-7y|-|t^2-7y^*|\,\Big| \leq \Big|(t^2-7y)-(t^2-7y^*)\Big|$$

$$= 7|y-y^*| \quad \forall (t,y),(t,y^*)\in\mathbf{R}^2$$

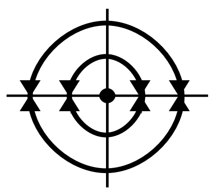
Por tanto también hay solución única si $7y_o=t_o^2$, y eso no nos lo decía el teorema 1.

Tratemos ahora de la **prolongablidad** de las soluciones de [P]. Supongamos f y f_y continuas en $D\subset\mathbf{R}^2$ y que (t_o,y_o) es interior a D. Entonces hay una única solución local $y(t)$ definida al menos en $[t_o-d,t_o+d]$. Pero, ¿hasta dónde se puede prolongar?, es decir, ¿cuál es el máximo intervalo I en el que está definida? Sobre todo queremos saber si $y(t)$ llega hacia la derecha hasta $+\infty$ y si lo hace hacia la izquierda hasta $-\infty$ (en otras palabras, si está definida en $[t_o,\infty)$ y en $(-\infty,t_o]$).

Aunque sea $D=\mathbf{R}^2$ esto puede no suceder como vimos en el ejemplo 3 de esta sección. La solución de $y'=y^2$ con $y(0)=b$, sólo podía si $b>0$ prolongarse (hacia la derecha) al intervalo $[0,1/b)$, pues en $t=1/b$ tenía una asíntota y no llegaba hasta ∞. Si $b<0$, aunque llegaba hasta ∞ no llegaba a $-\infty$, pues sólo estaba definida en $(1/b,\infty)$.

Otra forma en que una solución $y(t)$ está definida sólo en un intervalo finito viene ilustrada por:

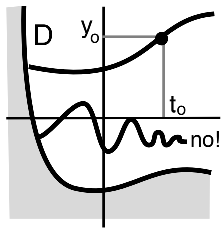
$$y'=-\frac{t}{y}\,,\ \text{de curvas integrales:}\quad t^2+y^2=C\,,$$

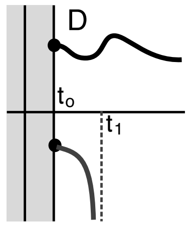


y con problemas de existencia y unicidad sobre $y=0$ que es precisamente donde van a morir cada una de las semicircunferencias solución.

El siguiente teorema, que no demostramos, resume las ideas de los dos ejemplos.

Teor 2. Si f y f_y son continuas en D la gráfica de la solución $y(t)$ de [P] no se para en el interior de D.
En particular, si D es el semiplano $\{t \geq t_o\}$ o bien $y(t)$ está definida en todo $[t_o, \infty)$ o bien existe $t_1 > t_o$ tal que $|y(t)| \underset{t \to t_1}{\to} \infty$.

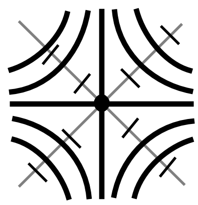




(resultado enteramente análogo a la izquierda de t_o)

La gráfica no para en un punto interior ya que, por el TEyU, existiría una solución local partiendo de dicho punto. Podríamos describir el teorema con otras palabras: la gráfica de las soluciones tienden hacia la frontera de *D*, entendiendo que si *D* es no acotado 'el infinito' pertenece a dicha frontera. El problema práctico (complicado en general) es distinguir entre las posibilidades que ofrece el teorema 2 si la ecuación no es resoluble (que, como sabemos, es lo normal). Demos alguna idea con ejemplos:

Ej 12. $\begin{cases} y' = -\frac{y^3}{t^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$ Es fácil hallar su solución $t^{-2}+y^{-2}=C$, pero veamos qué podemos decir basándonos sólo en dibujos aproximados (que en otras ocasiones será lo único que tendremos). Las isoclinas de esta homogénea son rectas.



Los TEyU aseguran solución única en $\mathbf{R}^2 - \{t=0\}$ y curva integral única para $\mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, y el crecimiento-decrecimiento prueba que por el origen sólo pasan las curvas integrales $y=0$ y $t=0$. Como la solución por $(1,1)$ decrece para $t \geq 1$ y no puede tocar (por unicidad) la solución $y=0$, no puede irse a $\pm\infty$ en tiempo finito y según el Teor2 está definida $\forall t \geq 1$. Por la izquierda no puede tocar $t=0$, con lo que debe tener una asíntota en un $t_1 \in (0,1)$. Necesitamos la solución $y = t/[2t^2-1]^{1/2}$ para ver que exactamente la tiene en $t_1 = 1/\sqrt{2}$.

Ej 13. $\begin{cases} y' = \operatorname{sen}(t+y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ La ecuación no es resoluble. f y f_y son continuas en $\mathbf{R}^2$.

Hay dos posibilidades, que la solución única llegue a $\pm\infty$ o que tenga una asíntota (que 'explote'). Si $y(t)$ explota, tanto ella como sus pendientes han de tender a ∞. Como es $|y'| \leq 1$, la solución está definida $\forall t$.

Identifiquemos dos problemas cuya prolongabilidad se reconoce a simple vista:

[Pl] $\begin{cases} y' = a(t)y + f(t) \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$, a y f **continuas en un intervalo** $I \ni t_o$ (I finito o infinito, cerrado o abierto).

Como tanto el segundo miembro de la ecuación como su derivada con respecto a y son continuas en un entorno del punto (t_o, y_o), [Pl] tiene solución única. Además, como vimos en la sección 1.1, esta solución viene dada por exponenciales e integrales de las funciones a y f, con lo que se tiene que:

La solución única de [Pl] **está definida** (al menos) **para todo** t **de** I.

$\begin{cases} y' = ay^n,\ a \neq 0,\ n = 2, 3, \ldots \\ y(t_o) = y_o \end{cases}$ Su solución es: $y = \dfrac{y_o}{\left[1 - a(n-1)y_o^{n-1}(t-t_o)\right]^{1/(n-1)}}$.

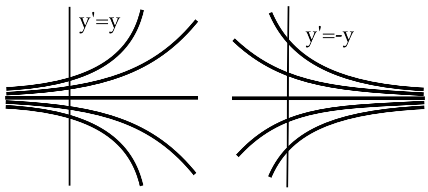
El denominador se anula si $t = t_o + \left[a(n-1)y_o^{n-1}\right]^{-1}$. Por tanto, salvo $y \equiv 0$, **todas las soluciones tienen una asíntota**. Para saber si la asíntota está a la derecha o izquierda de t_o basta mirar crecimiento y decrecimiento, o sea, el signo de ay^n.

1.4 Estabilidad

En lenguaje usual la posición de equilibrio de un objeto o la trayectoria de un móvil se dice estable si un pequeño cambio de sus condiciones iniciales modifica poco su evolución desde ese instante. El concepto matemático de estabilidad da rigor a esta idea. Definamos estabilidad para ecuaciones de primer orden (volveremos a tratarla en los capítulos 2 y 4).

Supongamos que [P] $\boxed{\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$ tiene solución única $y(t)$ definida en $[t_o,\infty)$.

¿Se parecerán a ella $\forall t\geq t_o$ las soluciones $y^*(t)$ de datos iniciales similares? Hemos visto ya casos en que no sucedía. Por ejemplo, la solución de $y'=y^2$ con $y(0)=0$ (la constante $y(0)\equiv 0$) está definida $\forall t\geq 0$ y sin embargo la correspondiente a un dato inicial próximo $y(0)=y_o^*$ (que era $y=y_o^*/[1-ty_o^*]$) ni siquiera llega hasta ∞ cuando $y_o^*>0$, pues tiene una asíntota en $t=1/y_o^*$. Y aunque todas las soluciones estén definidas en $[t_o,\infty)$ pueden ser para t grande muy diferentes entre sí. Así, las de:



$\begin{cases} y'=y \\ y(0)=0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=y_o^* \end{cases}$ que son $y\equiv 0$ e $y^*=e^t y_o^*$

son muy diferentes para grandes t, pues y^* tiende a $+\infty$ o $-\infty$ (según el signo de y_o^*). En cambio, las de $y'=-y$, que con esos datos son $y\equiv 0$ e $y^*=e^{-t}y_o^*$, cumplen $y^*\to y$ si $t\to\infty$.

Si [P] tiene solución única $y(t)$ definida en $[t_o,\infty)$ se dice que $y(t)$ es **estable** si $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que toda solución $y^*(t)$ con $|y_o-y_o^*|<\delta$ satisface:

1] $y^*(t)$ existe y está definida en $[t_o,\infty)$,

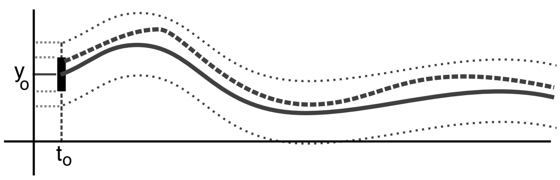
2] $|y(t)-y^*(t)|<\epsilon$ para todo $t\geq t_o$.

Decimos que $y(t)$ es **asintóticamente estable** si además $y^*(t)$ satisface:

3] $|y(t)-y^*(t)|\to 0$ cuando $t\to\infty$.

Una solución que no es estable se dice **inestable**.

Gráficamente, y es estable si para cualquier banda de altura 2ϵ en torno a ella existe un segmento de altura 2δ en torno a y_o tal que las soluciones que parten de él permanecen para todo $t\geq t_o$ dentro de la banda.

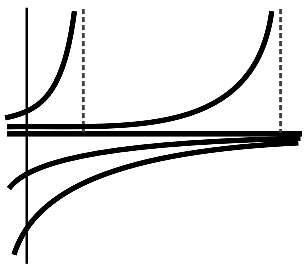


Para las ecuaciones de primer orden se puede probar que:

1] y **3]** $\Rightarrow$ **2]** (falso en sistemas y ecuaciones de orden n).

Así pues, para ver que la solución de una ecuación de primer orden es asintóticamente estable basta comprobar que toda solución que parte cerca de ella llega hasta ∞ y que la diferencia entre ambas tiende a 0 en el infinito, con lo que podemos evitar las acotaciones de **2]** que son siempre mucho más complicadas.

Ej 1. Analicemos la estabilidad de las soluciones de la conocida $\boxed{\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=y_o \end{cases}}$.



Como las soluciones con $y_o>0$ explotan no tiene sentido hablar de su estabilidad. La $y=0$ es claramente inestable pues las que parten cerca de ella por arriba ni siquiera están definidas $\forall t\geq 0$ (las que parten por debajo sí se parecen a ella, pero esto debe suceder para toda solución que parta cerca). Cualquier solución con $y_o<0$ (definida $\forall t\geq 0$) es AE: si $|y_o-y_o^*|$ es pequeño y^* llega hasta ∞ y además:

$$|y-y^*|=\Big|\frac{y_o}{1-ty_o}-\frac{y_o^*}{1-ty_o^*}\Big|\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}0\,.$$

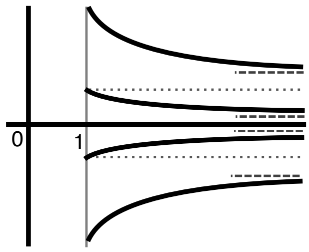
Ej 2. $\boxed{\begin{cases} y'=-y^3/t^3 \\ y(1)=0 \end{cases}}$ En 1.3 la dibujamos y resolvimos: $t^{-2}+y^{-2}=C$. La solución que cumple $y(1)=b$ es $y_b=bt\left[b^2(t^2-1)+t^2\right]^{-1/2}$.

Estamos analizando $y\equiv 0$. Todas las y_b están definidas $\forall b$ si $t\geq 1$, pero $y_b \underset{t\to\infty}{\to} b[b^2+1]^{-1/2}\neq 0$. Por tanto no es AE.

Estable sí lo es:

$\forall\epsilon$ tomando $\delta=\epsilon$ se tiene que si $|b|<\delta$ es $|y_b|\leq|b|<\epsilon$ $\forall t\geq 1$.

(La estabilidad se puede probar sin hallar y_b: como las soluciones decrecen en el primer cuadrante y crecen en el cuarto, a partir de $t=1$ se mueven entre las rectas $y=0$ e $y=b$, luego llegan hasta ∞ y es estable $y\equiv 0$).



El estudio de la estabilidad es, en general, bastante difícil. Como se pueden resolver muy pocas ecuaciones no será posible normalmente usar las soluciones. Pero en otros casos se podrán obtener conclusiones estudiando la propia ecuación. Veamos resultados en ese sentido para las **ecuaciones lineales**:

Sea [PI] $\boxed{\begin{cases} y'=a(t)y+f(t) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}}$, con a y f continuas en $[t_o,\infty)$.

Como sabemos, para todo y_o, [PI] tiene solución única definida para todo $t\geq t_o$, de expresión conocida. La diferencia entre dos soluciones cualesquiera es

$$|y(t)-y^*(t)| = |y_o-y^*_o|\, e^{\int_{t_o}^t a(s)ds} \quad \text{y por tanto:}$$

Teor 1. La solución de [PI] es estable si y sólo si $e^{\int_{t_o}^t a(s)ds}$ está acotada.
Es asintóticamente estable si y solo si $e^{\int_{t_o}^t a(s)ds} \underset{t\to\infty}{\to} 0$.

Observemos que **la estabilidad no depende de y_o ni de $f(t)$** [ni de t_o si a y f son continuas a partir de ese punto]. Para una lineal (no para otras tipos) tiene pues sentido hablar de la **estabilidad de la ecuación** pues o todas las soluciones son estables, o todas son asintóticamente estables, o todas son inestables. Esto era esperable pues las soluciones son suma de una solución particular más la general de la homogénea y es ésta la que nos dice si todas las soluciones se acercan o no a una dada. De hecho tenemos que una ecuación lineal es estable [asintóticamente estable] si y sólo si lo es la solución $y\equiv 0$ de la homogénea.

En particular, para las ecuaciones de **coeficientes constantes**, se deduce inmediatamente del teorema:

$y'=ay+f(t)$ es **AE**, **EnoA** o **I**, según sea, respectivamente, $a<0$, $a=0$ ó $a>0$.

(pues e^{at} tiende a 0, está acotada o no está acotada en cada caso).

Ej 3. $\boxed{y'=-\frac{y}{t}+\cos[\ln(1+t^2)]}$ Para $t>0$ es $e^{-\int dt/t}=\frac{1}{t}$ acotada y $\to 0$ cuando $t\to\infty$.

Por tanto, la solución que satisface cualquier dato inicial $y(t_o)=y_o$ con $t_o>0$ es asintóticamente estable. (Si $t_o<0$ las soluciones $y=C/t+y_p$ sólo llegan hasta $t=0$; el teorema se ha enunciado para el caso en que los coeficientes son continuos a partir de t_o).

Ej 4. $\boxed{y'=\frac{y}{1+t^2}}$ Todas sus soluciones son EnoA: $e^{\int a}=e^{\arctan t}$ es acotada, pero $\not\to 0$ si $t\to\infty$.

(Si no hay discontinuidades de a o f ni nos preocuparemos del t_o, pues es claro que el límite de la exponencial no depende de cual sea el límite inferior de la integral).

Ej 5. Estudiemos la estabilidad de la solución de $\boxed{\begin{cases} y'=t-2y \\ y(1/2)=0 \end{cases}}$ (ecuación resuelta y dibujada en 1.2).

Por ser lineal con coeficientes constantes, basta mirar el -2 para concluir que todas las soluciones (y esa en concreto) son AE. La solución particular con el dato inicial es $y=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}$ (que aunque $\to\infty$ es AE).

Podría pensarse que para una ecuación no lineal de la forma $y'=a(t)y+b(t)y^2+c(t)y^3+\cdots$ la estabilidad de su solución $y=0$ coincidirá con la de su 'aproximación lineal': $y'=a(t)y$ (hay teoremas que precisan esta idea y veremos uno de ese tipo en las autónomas de la sección 1.5). El siguiente ejemplo demuestra que la conjetura anterior, en general, es falsa:

Ej 6. Para las dos ecuaciones de Bernouilli: [1] $\boxed{y'=-y+e^{-t}y^2}$ y [2] $\boxed{y'=-y+e^{t}y^2}$,
la parte lineal de ambas ($y'=-y$) es AE. Sus dibujos y soluciones y_b con $y(0)=b$ son:

[1] $y_b=\frac{2be^{-t}}{be^{-2t}+2-b}$ [2] $y_b=\frac{be^{-t}}{1-bt}$

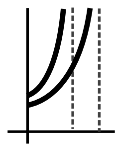
Ambas $y_b\to 0$ si $t\to\infty$. Aunque para [1] y_b está definida en $[0,\infty)$ si b cercano a 0, pero no para [2] (tiene asíntota en $t=\frac{1}{b}$). Por tanto $y\equiv 0$ es solución AE de [1] e I de [2].

Para acabar introducimos el concepto de **dependencia continua** (de datos y parámetros).

Supongamos que el problema [P] $\begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}$ describe un sistema físico.

Midiendo experimentalmente el dato inicial y_o cometeremos errores. Nuestra ecuación no sería útil para describir el sistema si a valores iniciales y_o^* parecidos no correspondiesen soluciones semejantes. Pero, por suerte, se puede demostrar (es largo y no lo haremos) que si f es buena hay siempre **dependencia continua de datos iniciales**, es decir, que la solución es función continua de y_o . Antes de precisarlo con teoremas veamos un ejemplo:

Ej 7. Sea $\boxed{\begin{cases} y'=y^2 \\ y(0)=b \end{cases}}$ Su solución es, como sabemos, $y(t,b)=\frac{b}{1-bt}$.
[La podemos ver como función de t y además de b].



Sea, por ejemplo, $b>0$. Mirando sólo la solución para $t\geq 0$ vemos que está definida hasta $t_1=b^{-1}$. Para b^* próximos la solución tendrá un intervalo de definición similar. En un intervalo en el que estén definidas todas estas $y(t,b)$ cercanas (en que el denominador no se anule) es claro que $y(t,b)$ es continua en ambas variables.

Sean f, f_y continuas en un entorno de (t_o,y_o). Sabemos que entonces la solución de [P] $y(t,y_o)$ está definida al menos en un intervalo $I=[t_o,t_o+d]$. En estas condiciones se tiene:

Teor 2. Si $|y_o-y_o^*|$ es suficientemente pequeño, $y(t,y_o^*)$ está también definida en ese mismo I y además si $y_o^*\to y_o$ se tiene que $y(t,y_o^*)\to y(t,y_o)$ para todo $t\in I$.

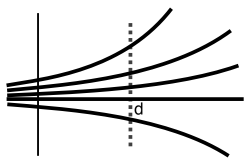
Se puede escribir esto de otra forma para compararlo con la estabilidad:

$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0$ tal que si $|y_o-y_o^*|<\delta$ entonces $|y(t)-y^*(t)|<\epsilon$ para todo $t\in[t_o,t_o+d]$.

Así que, en intervalos finitos, las soluciones (inestables incluidas) de toda ecuación siguen lo próximas que queramos si partimos suficientemente cerca. La distinción entre estables e inestables aparece al considerar intervalos infinitos. Comprobemos que se cumple la afirmación con $\epsilon-\delta$ de arriba para una de las soluciones inestables vistas:

Las soluciones $y\equiv 0$ de $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=0 \end{cases}$ e $y^*=e^t y_o^*$ de $\begin{cases} y'=y \\ y(0)=y_o^* \end{cases}$,
en cualquier intervalo finito $[0,d]$ satisfacen

$|y^*-y|=e^t|y_o^*|\leq e^d|y_o^*|<\epsilon$ si $|y_o^*-0|<\delta=e^{-d}\epsilon$ $\forall t\in[0,d]$.



En nuestro sistema físico podría aparecer también un parámetro a: $[\mathrm{P}_a]$ $\begin{cases} y'=f(t,y,a) \\ y(t_o)=y_o \end{cases}$.

Para que la ecuación sea útil a valores de a próximos deben corresponder soluciones similares. Se demuestra que si $f(t,y,a)$ es buena la solución es también función continua de a (es decir, hay **dependencia continua de parámetros**). Veamos un ejemplo para corroborarlo:

Ej 8. $\boxed{\begin{cases} y' = at^{-1}y-1 \\ y(1)=0 \end{cases}}$ $\rightarrow$ $y(t,a)=t^a\int_1^t s^{-a}ds=\begin{cases} (t-t^a)/(1-a) \text{ si } a\neq 1 \\ t\ln t \text{ si } a=1 \end{cases}$

f buena cerca de $(1,0)$ $\Rightarrow$ dependencia continua de a . Aunque no lo parezca es $y(t,a)$ también continua para $a=1$: si $a\to 1$ la expresión de arriba tiende a $t\ln t$ (L'Hôpital).

1.5 Ecuaciones autónomas

Son ecuaciones en las que la variable independiente no aparece explícitamente:

$$[a] \quad \boxed{y'=f(y)}$$

Suponemos que f' es **continua en todo R** con lo que hay solución única para cualquier condición inicial.

Como [a] es de variables separables, es fácil hallar su solución implícita:

$\int \frac{dy}{f(y)} = t+C$ (la primitiva puede ser no calculable o muy complicada).

Pero muchas características importantes de las soluciones se deducen fácilmente del estudio de la propia f. En particula, será muy fácil hacer dibujos aproximados y precisar la estabilidad de sus soluciones, gracias a los siguientes teoremas:

Teor 1. $\boxed{y(t) \text{ solución de [a]} \Rightarrow y(t+C) \text{ es también solución de [a].}}$

Sea $z(t)=y(t+C)$; entonces $z'(t)=y'(t+C)=f(y(t+C))=f(z(t))$.

Teor 2. $\boxed{\text{Si } a\in\mathbf{R} \text{ es tal que } f(a)=0 \Rightarrow y(t)\equiv a \text{ es solución de [a].}}$

(A estas soluciones constantes se les llama también soluciones de equilibrio).

La prueba es realmente trivial: $y'(t)=0=f(a)=f(y(t))$.

Teor 3. Cada solución de [a] es o constante, o estrictamente creciente, o estrictamente decreciente.

Sea y solución. Si existe un t_o para el que $y'(t_o)=0 \Rightarrow f(y(t_o))=0 \Rightarrow y(t)\equiv y(t_o)$ es solución (teorema 2), única que pasa por ese punto. Ninguna solución puede tener ni máximos ni mínimos si no es constante.

Teor 4. Toda solución acotada a la derecha de un t_o tiende hacia una solución de equilibrio cuando $t\to\infty$ [si lo está a la izquierda lo hace cuando $t\to-\infty$].

Probémoslo si $t\to\infty$ (análogo a la izquierda). Si $y(t)$ es constante, es evidente. Sea $y(t)$ monótona y acotada para $t\geq t_o$ (por el teorema de prolongabilidad $y(t)$ está definida en $[t_o,\infty)$ pues no puede irse a infinito en tiempo finito). Un resultado elemental de cálculo asegura que $y(t)$ tiende hacia un límite a si $t\to\infty$. Probemos que $f(a)=0$. Como f es continua, $y'(t)=f(y(t))$ también tiene límite si $t\to\infty$ y ese límite es $f(a)$. Aplicando el teorema del valor medio a la $y(t)$ en $[t,t+1]$ tenemos que existe un $c\in(t,t+1)$ tal que $y'(c)=y(t+1)-y(t)$. Por tanto: $f(a)=\lim\limits_{c\to\infty} y'(c)=\lim\limits_{t\to\infty}[y(t+1)-y(t)]=a-a=0$.

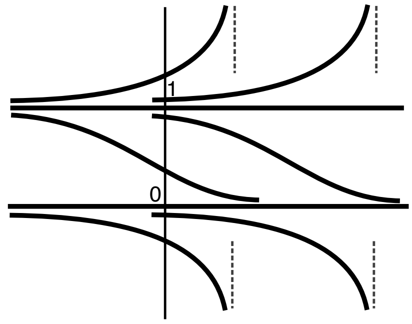
Teor 5. Si $f(y)/g(y)\to\text{cte}>0$ cuando $y\to\infty$ las soluciones no acotadas de $y'=f(y)$ tienen asíntotas si sólo si las tienen las de $y'=g(y)$. En particular, explotan todas las soluciones no acotadas de $y'=P(y)$ si P es un polinomio de grado mayor que 1.

Como la solución de [a] es $t+C=\int^y \frac{ds}{f(s)}$, decir que $y\to\pm\infty$ para t finito equivale a decir que $\int^{\pm\infty}\frac{ds}{f(s)}$ es una integral impropia convergente y esta lo es (por los criterios de impropias) si y sólo si lo es la integral de la $\frac{1}{g}$.

El caso particular es consecuencia de que explotan las soluciones no nulas de $y'=ay^n$, $n>1$ (lo vimos al final de 1.3).

Ej 1. $\boxed{y' = y^3 - y^2}$. Como $y^2(y-1)=0 \to y=0$, $y=1$, estas son las soluciones constantes.

Como $y^2(y-1)>0$ si $y>1$ e $y^2(y-1)<0$ si $y<0$ ó si $y\in(0,1)$, sabemos qué soluciones crecen o decrecen y las soluciones de equilibrio a que tienden (sin llegar a tocarlas). Las soluciones que están por encima de $y=1$ llegan hasta ∞ pues si estuviesen acotadas deberían tender hacia una solución constante y no la hay (según el teorema 5 lo hacen en tiempo finito). Tampoco están acotadas las de $y<0$ (también explotan). Sabiendo además que las trasladadas a derecha e izquierda de una solución lo son también completamos el dibujo.



(Podríamos además pintar alguna isoclina (son rectas $y=b$) y la recta de puntos de inflexión:

$$y'' = (y^3-y^2)(3y^2-2y) = 0 \to \ y = \tfrac{2}{3} \ \text{ y las rectas solución).}$$

(No es útil para el dibujo hallar la complicada solución: $\int \frac{dy}{y^3-y^2} = \ln|\frac{y-1}{y}| + \frac{1}{y} = t+C$).

El estudio de la **estabilidad** de una ecuación cualquiera (incluso de primer orden) es difícil en general, pero en las autónomas, por los teoremas vistos, pasa a ser trivial: **el dibujo basta para precisar la estabilidad**.

Para el ejemplo 1 es inmediato ver que $y=0$ es inestable, pues las soluciones cercanas de abajo se van a $-\infty$ (no se necesita siquiera su prolongabilidad). $y=1$ también es I: las de arriba van a $+\infty$ y las de abajo a $y=0$. Cualquier solución entre 0 y 1 es AE: las soluciones cercanas están definidas $\forall t$ y la diferencia entre ellas tiende a 0 si $t \to \infty$ pues todas ellas tienden a la misma solución de equilibrio, según asegura el teorema 4.

Observemos que este teorema 4 no es cierto para ecuaciones no autónomas (por eso no es trivial la estabilidad) y que pueden existir soluciones que se aproximen a una solución constante y que no tiendan a ella, u otras que se alejen de ella, pero manteniéndose cerca (como muestran los ejemplos 2 y 4 de la sección anterior).

Damos un **criterio de estabilidad de soluciones constantes** que, aunque aquí no diga nada nuevo, es la versión sencilla del que veremos en el capítulo 4 cuando estudiemos los sistemas autónomos:

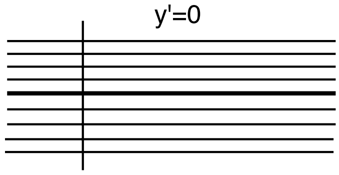
Teor 6. Sea $f(a)=0$. Si $f'(a)<0$, $y(t)\equiv a$ es asintóticamente estable.
Si $f'(a)>0$, $y(t)\equiv a$ es inestable.

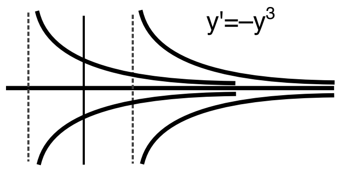
Si $f'(a)<0$, f decrece en a , luego $f(y)$, cerca de a , pasa de ser positivo a negativo al aumentar y ; las soluciones pasan de ser crecientes a ser decrecientes, lo que unido al teorema 4 nos da la estabilidad asintótica. Si $f'(a)>0$ pasan de ser decrecientes a ser crecientes; las primeras se van a $-\infty$ o hacia otra solución constante y las segundas a ∞ o hacia otra constante; hay inestabilidad.

Este es uno de los casos en que sí hereda una ecuación no lineal la estabilidad de su aproximación lineal. En efecto, desarrollando por Taylor la $f(y)$ en torno a $y=a$ tenemos:

$$y'=f'(a)(y-a)+o(|y-a|) \ , \text{ es decir } \ z'=f'(a)z+o(|z|) \, , \text{ si } z=y-a \, ,$$

y el signo de $f'(a)$, como sabemos, da la estabilidad de la lineal $z'=f'(a)z$. No se puede afirmar nada sobre la no lineal si la lineal es simplemente estable, es decir, si $f'(a)=0$. En ese caso la solución constante puede ser estable o asintóticamente estable como sucede con la solución $y=0$ de $y'=0$ y de $y'=-y^3$:

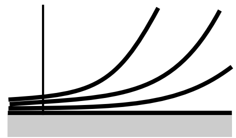




o ser inestable, como la solución $y=0$ del ejemplo 1 (en él es, $f'(y)=3y^2-2y$, $f'(0)=0$).
El teorema 6 sí nos confirma la inestabilidad de la otra solución constante: $f'(1)=1>0$.

Estudiemos ahora varias ecuaciones autónomas que describen modelos de crecimiento de una población animal (en ellas $y(t)$ representa la población que hay en el instante t y a, b, M son constantes positivas). La más sencilla (es también lineal) viene de suponer la velocidad de crecimiento de la población proporcional al número de animales existentes, o sea,

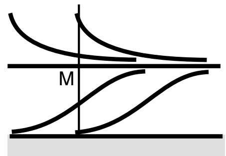
$$[1]\ \boxed{y'=ay}\ ,\ y(t_o)=y_o\ \rightarrow\ y=y_o\,\mathrm{e}^{a(t-t_o)}\,.$$



Dibujamos sus soluciones sólo donde tienen sentido (en $y\geq 0$):

En [1] está implícita la suposición de que hay alimentos y espacio vital ilimitados. Si hay una población máxima M que admite el ecosistema, describirá mejor la evolución la llamada

ecuación logística: [2] $\boxed{y'=by(M-y)}$



de soluciones fáciles de pintar. La solución $y\equiv M$ es AE y hacia ella tienden todas las demás positivas para cualquier dato inicial: pasado el tiempo habrá en el ecosistema una población M. Para conocer la población en un instante t hay que hallar la solución con $y(t_o)=y_o$:

$$y = My_o\big[y_o+(M-y_o)\mathrm{e}^{-bM(t-t_o)}\big]^{-1}\quad \text{(la ecuación es separable o Bernouilli)}$$

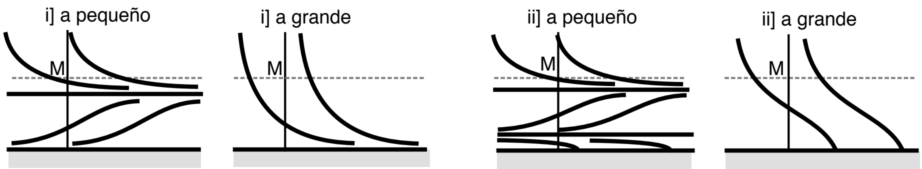
función que tiene el comportamiento asintótico previsto con las técnicas de autónomas.

Imaginemos ahora que [2] rige la población de truchas en un estanque y que una persona pesca truchas: **i]** a un ritmo proporcional al número de ellas existente, **ii]** a ritmo constante (independientemente de las que haya). Las técnicas de autónomas nos permiten predecir con facilidad el número de truchas que habrá en el estanque para grandes valores de t. Las ecuaciones que rigen la evolución de y en ambos casos son:

$$[2\mathrm{i}]\ \boxed{y'=by(M-y)-ay}\qquad \text{y}\qquad [2\mathrm{ii}]\ \boxed{y'=by(M-y)-a}$$

Las soluciones de equilibrio son para [2i] $y=0$ e $y=M-\frac{a}{b}$ y para [2ii] $y=\frac{M}{2}\pm\sqrt{\frac{M^2}{4}-\frac{a}{b}}$.

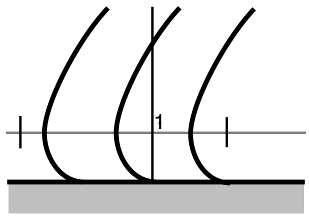
Si a es grande (pescador muy hábil) la segunda solución constante de [2i] pasa a ser negativa y las dos de [2ii] se convierten en complejas. Viendo el signo de y' se tiene:



Si el pescador es poco hábil el número de truchas se estabiliza en torno a un valor algo inferior al tope logístico M (salvo en ii] si inicialmente son muy pocas). Si es hábil las truchas siempre se extinguen (en tiempo finito en el caso ii]).

Para acabar, observemos que si $f(y)$ no es tan regular como exigimos al principio, de forma que no haya existencia y unicidad en todo el plano, también pueden fallar algunas de las propiedades que hemos demostrado basándonos en ese hecho:

Ej 2. $\boxed{y'=\frac{2\sqrt{y}}{y-1}}$ Ecuación definida sólo si $y\geq 0$, con solución única en $y>1$ e $y\in(0,1)$, y problemas en $y=0,1$.



$y=0$ es la única solución de equilibrio. Las soluciones son crecientes en $y>1$ y decrecientes en $y\in(0,1)$. Por cada punto de $y=1$ pasa una única curva integral de pendiente vertical. Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$t=\int\frac{y-1}{2\sqrt{y}}dy+C=\frac{1}{3}\sqrt{y}\,(y-3)+C\,,$$

lo que completa el dibujo.

Hay soluciones que no son estrictamente monótonas (primero decrecen y luego son constantes) y soluciones acotadas a la izquierda que mueren en $y=1$ y que por tanto no tienden hacia ninguna solución de equilibrio.

1.6 Métodos numéricos

Queremos calcular aproximadamente la solución del problema de valores iniciales:

$$[\mathrm{P}]\ \begin{cases} y'=f(t,y) \\ y(t_0)=y_0 \end{cases}$$

(suponemos f suficientemente buena para que [P] tenga solución única $y(t)$ cerca de t_0).

Pocas ecuaciones de primer orden son resolubles y hacer un dibujo aproximado es difícil si la $f(t,y)$ no es sencilla. Pero, aunque f sea complicada, siempre podremos acudir a métodos numéricos (iterativos y fácilmente programables), como los que vamos a describir a continuación. En los tres iremos hallando valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots$ cercanos a los de la solución $y(t)$ en una serie de puntos $t_0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots$ separados entre sí una distancia (**paso**) h fija, es decir, $t_1=t_0+h$, $t_2=t_0+2h$, ..., $t_k=t_0+kh$, ...

El más sencillo (y menos preciso) de los métodos es el de **Euler**, que consiste en aproximar la solución desconocida por su tangente conocida. Es decir, si h es pequeño es de esperar que el valor de la solución $y(t_0+h)=y(t_1)$ sea próximo al valor de la recta tangente en ese mismo punto: $y_0+hf(t_0,y_0)$, que llamamos y_1. Como (t_1,y_1) se parece al desconocido $(t_1,y(t_1))$ podemos aproximar $y(t_2)$ por el y_2 que obtendremos de (t_1,y_1) de la misma forma que obtuvimos el y_1 a partir del (t_0,y_0) inicial. Prosiguiendo así vamos obteniendo los y_k aproximados (más inexactos según nos alejamos de t_0) dados por:

$$\boxed{y_{k+1}=y_k+hf(t_k,y_k)}$$

Es previsible que se mejore la aproximación si tomamos:

$$\boxed{y_{k+1}=y_k+\tfrac{h}{2}\left[f(t_k,y_k)+f(t_k+h,y_k+hf(t_k,y_k))\right]}$$ (método de **Euler modificado**)

es decir, si en cada paso elegimos, en vez de la pendiente en un extremo, el valor medio de las pendientes asociadas a dos puntos: el de partida y el previsto por el método de Euler.

El tercer método, muy utilizado y bastante más exacto, es el de **Runge-Kutta**, que exige un mayor número de operaciones (aunque a un ordenador no le llevará mucho más tiempo realizarlas) y que en cada paso toma el promedio ponderado de cuatro pendientes, cuyo significado geométrico ya no es fácil de intuir:

$$\boxed{y_{k+1}=y_k+\tfrac{h}{6}\left[f_{k1}+2f_{k2}+2f_{k3}+f_{k4}\right]}\ ,\ \text{ donde}$$

$$f_{k1}=f(t_k,y_k)\ ,\ f_{k2}=f(t_k+\tfrac{h}{2},y_k+\tfrac{h}{2}f_{k1})\ ,\ f_{k3}=f(t_k+\tfrac{h}{2},y_k+\tfrac{h}{2}f_{k2})\ ,\ f_{k4}=f(t_k+h,y_k+hf_{k3})$$

Ej 1. $\boxed{y'=t-2y}$ En la sección 1.2 hallamos su solución general: $y=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+Ce^{-2t}$.

Resolvemos numéricamente con $y(0)=1$ (por los tres métodos) y comparamos con los valores exactos (para ese dato es $C=\frac{5}{4}$). Para $h=0.1$ listamos todos los resultados:

t	**Euler**	**Euler-mod**	**Runge-Kutta**	**exacto**
0	1	1	1	1
0.1	0.8	0.825	0.8234166667	0.8234134413
0.2	0.65	0.6905	0.6879053389	0.6879000575
0.3	0.54	0.58921	0.5860210311	0.5860145451
0.4	0.462	0.5151522	0.5116682856	0.5116612051
0.5	0.4096	0.463424804	0.4598565477	0.4598493015
0.6	0.37768	0.4300083393	0.4264998841	0.4264927649
0.7	0.362144	0.4116068382	0.4082530051	0.4082462049
0.8	0.3597152	0.4055176073	0.4023770104	0.4023706475
0.9	0.36777216	0.4095244380	0.4066294710	0.4066236103
1	0.384217728	0.4218100392	0.4191744355	0.4191691040

Comparamos ahora el resultado para $t=1$ con diferentes pasos:

paso	**Euler**	**Euler-mod**	**Runge-Kutta**	**exacto**
h=0.1	0.3842177280	0.4218100392	0.4191744355	0.4191691040
h=0.05	0.4019708182	0.4197780719	0.4191694105	0.4191691040
h=0.01	0.4157744449	0.4191920025	0.4191691045	0.4191691040
h=0.001	0.4188306531	0.4191693299	0.4191691040	0.4191691040
h=0.0001	0.4191352691	0.4191691063	0.4191691040	0.4191691040

(obsérvese, por ejemplo, como Runge-Kutta con $h=0.1$ da un valor más exacto que Euler con $h=0.0001$ [y son 40 frente a 10000 evaluaciones de la función $f(t,y)$]).

Se puede demostrar que el **error** local (cometido en cada paso) para cada uno de los tres métodos citados es proporcional, respectivamente, a h^2, h^3 y h^5, mientras que el error acumulado en sucesivas iteraciones es de orden h, h^2 y h^4. Como era de esperar los resultados mejoran al tomar h más pequeños (pero sólo hasta un límite ya que el error de redondeo de toda calculadora u ordenador hace que si disminuimos demasiado el paso h, aparte de incrementarse el tiempo de cálculo, puede aumentar el error).

Ej 2. $\boxed{y'=y^2-t}$ Hallemos numéricamente entre -1 y 3 la solución con $y(-1)=0$.

El dibujo aproximado de la sección 1.2 no aclara si se trata de una de las soluciones que van a infinito o de una de las que cruzan la isoclina de máximos. Empezamos con h=0.1. Los y_k obtenidos por los tres métodos están en la siguiente tabla (sólo hemos escrito los correspondientes a los t enteros para $t\geq 0$):

t	**Euler**	**Euler-mod**	**Runge-Kutta**
−1	0	0	0
−0,9	0.1	0.0955	0.0953100738
−0,8	0.191	0.1826934847	0.1823176520
−0,7	0.2746481	0.2629009594	0.2623378481
−0,6	0.3521912579	0.3371304370	0.3363726607
−0,5	0.4245951261	0.4061567380	0.4051902841
−0,4	0.4926232282	0.4705749490	0.4693783604
−0,3	0.5568909927	0.5308364662	0.5293796824
−0,2	0.6179037505	0.5872727793	0.5855155255
−0,1	0.6760842550	0.6401101498	0.6379997588
0	0.7317932469	0.6894770720	0.6869456018
1	1.214197534	0.9357162982	0.9176486326
2	1.988550160	–0.1256257297	–0.1884460868
3	272.5279419	–1.528819223	–1.541258296

Aunque inicialmente los números son similares, los errores acumulados del método de Euler nos dan para t positivos unos valores de la solución ya totalmente diferentes a los reales, que serán más parecidos a los hallados por otros métodos más exactos (convendrá, siempre que se pueda, hacerse una idea de las soluciones que se están tratando antes de meterse con el cálculo numérico para estar avisados sobre las posibles anomalías). Repitiendo los cálculos con pasos más pequeños se obtiene si:

	t	**Euler**	**Euler-mod**	**Runge-Kutta**
h=0.05:	0	0.7100063518	0.6875612633	0.6869451577
	3	–1.361623743	–1.538408604	–1.541275123
h=0.01:	0	0.6916677024	0.6869692560	0.6869451313
	3	–1.526589427	–1.541165493	–1.541276176

Observemos para acabar que la demostración del teorema 1* de existencia y unicidad nos da una forma de hallar funciones próximas a la solución de un problema de valores iniciales: en las hipótesis del teorema, las aproximaciones de Picard convergen uniformemente (lo hacen en norma) hacia la solución única.

Ej 2*. Hallemos las dos primeras aproximaciones de Picard para el ejemplo anterior.

(En este caso las integrales son sencillas, pero la mayoría de las veces las cosas no van a ir tan bien, pues nos pueden salir primitivas no elementales o complicadas de calcular; además, a diferencia de los métodos anteriores, éste no es programable).

$$y_o(t)=0 \;\to\; y_1(t)=0+\int_{-1}^{t}(0-s)\,ds=\tfrac{1}{2}[1-t^2] \;\to$$

$$y_2(t)=\int_{-1}^{t}\left(\tfrac{1}{4}[1-s^2]^2-s\right)ds=\tfrac{19}{30}+\tfrac{t}{4}-\tfrac{t^2}{2}-\tfrac{t^3}{6}+\tfrac{t^5}{20}\,.$$

Los valores de y_1 e y_2 para diferentes t están a la derecha. Comparando con los números de antes se ve que las aproximaciones son buenas para t cercano a -1, pero no tienen nada que ver con la realidad para valores grandes de t. Sin embargo, este método nos ha dado expresiones analíticas aproximadas de la solución.

t	y_1	y_2
−1	0	0
−0,9	0.095	0.09530883333
−0,8	0.18	0.1822826667
−0,7	0.255	0.2620965
−0,6	0.32	0.3354453333
−0,5	0.375	0.4026041667
−0,4	0.42	0.463488
−0,3	0.455	0.5177118333
−0,2	0.48	0.5646506667
−0,1	0.495	0.6034995
0	0.5	0.6333333333
1	0	0.2666666667
2	–1.5	–0.6
3	–4	4.533333333