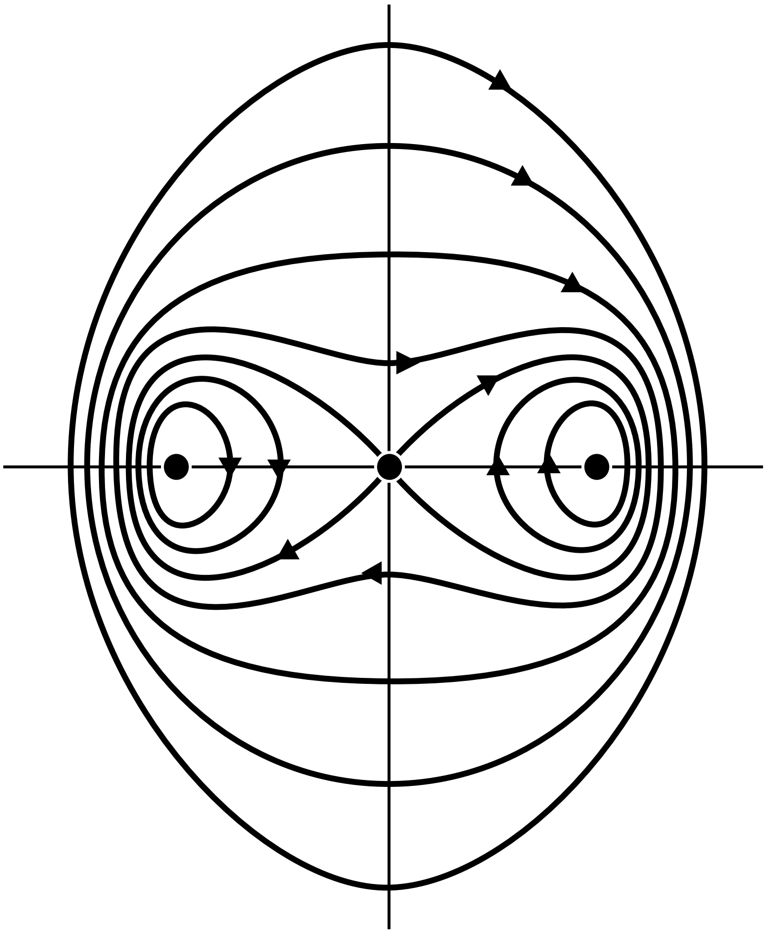
2009

apuntes de ecuaciones diferenciales I



Pepe Aranda

pparanda@fis.ucm.es

Métodos Matemáticos
Físicas Complutense

www.ucm.es/centros/webs/d215

Índice

Sobre las versiones de los apuntes

La primera versión de estos apuntes fue la de **1999**, adaptación de los apuntes de EDOs para la asignatura Métodos Matemáticos II de un viejo plan de estudios, en los que se trataban algunos temas más avanzados (la asignatura actual es de 2^o curso en lugar de 3^o, y tiene 6 créditos (4 horas semanales) en lugar de 7.5 (5 horas)). Desaparecieron resultados de prolongabilidad, estabilidad, soluciones periódicas, funciones de Lyapunov...

En la **versión 2000** sobre todo se introdujeron bastantes ejemplos nuevos en muchas secciones (en 1.1, 1.2, 2.2, 2.4, 2.5, 3.2, 3.3, 4.2, 4.3 y 4.4), pasaron a estar en 'letra pequeña' algunos temas (métodos numéricos o transformadas de Lapace de la δ, por ejemplo), apareció la ecuación de Hermite,... y como todos los cursos se modificaron los problemas incluyendo los de examen, se trasladaron otros a los adicionales...

En el año **2001** hubo pocas novedades (ligeras precisiones nuevas en un teorema, cambios de problemas, corección de erratas...) y casi lo mismo en el **2002**.

En la **versión 2003** principalmente se modificó la introducción a los apuntes y se reescribieron y se añadieron diferentes ejemplos a las secciones 1.3 y 1.4 (las que suelen tener mayor dificultad de comprensión). En **2004** no hubo cambios apreciables en la parte de teoría.

La **versión 2005** mantuvo los contenidos de las anteriores, pero se retocaron casi todas las secciones (y ejemplos), algunas ligeramente y otras bastante profundamente. Los mayores cambios fueron:

• En 1.1 se dio más sitio a las lineales. Se detallaron más las técnicas generales de dibujo en 1.2. En 1.3 se aclararó el uso de la ecuación equivalente. En 1.4 se insistió más en las lineales. 1.5, 1.6 y 1.7 cambiaron poco.

• 2.1 quedó casi igual. Algunos teoremas sobre sistemas en 2.2 cambiaron de sitio, se añadieron comentarios y se extendieron ejemplos. La sección 2.3 se dividió en dos y pasó 2.4 a contener la estabilidad. El nuevo 2.3 pasó a tratar primero las ecuaciones de orden n y luego los sistemas, y la estabilidad de 2.4 también se retocó (con nuevos ejemplos en los tres casos). En la transformada de Laplace (nuevo 2.5) se añadieron comentarios y ejemplos y se reordenaron otros. Las soluciones periódicas sólo tuvieron cambios cosméticos.

• 3.1 cambió poquito. 3.2 pasó a empezar por un ejemplo y se redactó de nuevo el teorema. En 3.3 se pasó a trabajar desde el principio en $t=0$, introduciendo antes la [e*], y la constante a del teorema de Frobenius pasó a llamarse d. Se sacaron del viejo 3.4 las alusiones al punto del infinito (formando una nueva seccioncilla 3.5) y se pasó a presentar la función gamma antes de tratar Bessel.

• 4.1, 4.3 y 4.4 casi no cambiaron. Se añadieron a 4.2 dos ejemplos lineales, la matriz de la aproximación lineal pasó a llamarse $\mathbf{M}$, se trató de argumentar de forma más sistemática dónde conviene evaluar el campo $\mathbf{v}$ y cómo hallar alguna solución del sistema, y se agruparon al final los ejemplos de ecuaciones.

Las introducciones a cada capítulo fueron todas retocadas. Y también algo la bibliografía.

Los problemas se reorganizaron bastante. Pasaron a existir 4 hojas de problemas, suficientes para controlar los aspectos básicos de la asignatura, y otras 8 con problemas adicionales. Las hojas eran las viejas hojas comunes de la asignatura a las que se añadieron unos cuantos problemas de temas que antes no contenían (no eran comunes a todos los grupos) y otros de exámenes del curso previo. Los adicionales incluyeron el resto de los elaborados a lo largo de los años: unos similares a los de las hojas y que no merece la pena incluir en ellas y otros que tratan de temas tangenciales a la asignatura (dependencia continua, cálculo numérico, ecuaciones con la δ, propiedades de funciones especiales, problemas con puntos no elementales, aplicaciones,...].

En la **versión 2007** (en el 06-07 no fui profesor de EDI) no se tocó la teoría. La portada pasó a incluir la nueva página del departamento y se cambiaron de sitio y contenido estas notas sobre las sucesivas versiones. Las 'hojas' de problemas pasaron a llamarse 'problemas', conteniendo ejercicios de examen del curso 05-06 y pasaron a estar numeradas continuando la teoría. Los problemas retirados de las hojas se fueron a los 'adicionales' y de estos (transcritos ya también a LaTeX desaparecieron algunos que (junto a otros) constituyeron los problemas para trabajar en grupo y entregar en el grupo piloto.

Hacia mayo de 2007 hice la transcripcion al **LaTeX** (utilizando letra 'palatino') de los apuntes de 2007, con bastantes pequeñas modificaciones para ajustar el texto anterior a los nuevos tipos y márgenes.

Y esta es la **versión 2008**, con muy abundantes pequeñas modificaciones:

• Para recuperar algo del estilo de los viejos apuntes en helvética, la letra es ahora la similar (sans serif) bitstream vera (paquete 'arev' en LaTeX) y se han ampliado los márgenes, intentando dar un aspecto menos denso a los apuntes. En la actualidad constan de 90 páginas de teoría, 4 de problemas y 8 de problemas adicionales.

• La sección 1.1 sólo tiene cambios de estilo, resaltando los grandes tipos de ecuaciones resolubles. En 2.2 se reordenan los ejemplos y se sustituye uno por el 5. En 2.3 se retrasa algún ejemplo y se añade el análisis de los de 2.2. En 2.4 se abrevia aún más la (en letra pequeña) dependencia continua. En 2.5 se incluyen los ejemplos autónomos de evolución de poblaciones de la sección 2.7 de 2007 (que desaparece). 2.6 permanece.

• 2.1 no cambia. En 2.2 y 2.3 se resaltan titulares de las subsecciones, se desarrolla más algún ejemplo de 2.2 y se amplían los ejemplos de ecuaciones en 2.3. En 2.5 se reordenan ejemplos. 2.4 y 2.6 casi igual.

• 3.1 igual. En 3.2 se retoca algún ejemplo. En 3.3 se añade el ejemplo 2 y se amplía el (ahora) 5. 3.4 y 3.5 se mantienen.

• 4.1 tiene pocos cambios. En 4.2, aparte de algunas reordenaciones y ligeros cambios, se resaltan las técnicas concretas de dibujo y cálculo de soluciones, y es nuevo el ejemplo 7. Son nuevos en 4.3 los ejemplos 3 y 5. En 4.4 aparece el ejemplo 4.

• Se han retocado y extendido todas las introducciones (la global y la de cada capítulo). La bibliografía no se modifica. Los problemas sí lo hacen bastante (incluyendo nuevos inventados para los problemas y parcialillos del piloto o para los exámenes finales). Los retirados han pasado a adicionales.

En la versión 2009 sólo cambian los problemas.

Bibliografía

Bd **Boyce-Di Prima**. ECUACIONES DIFERENCIALES y problemas con valores en la frontera. (Limusa)

S **Simmons**. ECUACIONES DIFERENCIALES, con aplicaciones y notas históricas. (McGraw-Hill)

P **Plaat**. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. (Reverté)

R **Ross**. ECUACIONES DIFERENCIALES. (Reverté)

Br **Braun**. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SUS APLICACIONES. (Interamericana)

E **Elsgoltz**. ECUACIONES DIFERENCIALES Y CALCULO VARIACIONAL. (Mir)

H **Hirsch-Smale**. Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal. (Alianza)

F **Fernández-Vázquez-Vegas**. Ecuaciones diferenciales y en diferencias. (Thomson)

G **Guzmán**. Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control. (Alhambra)

Las secciones 1.1 y 1.2 se pueden encontrar en casi todos los libros anteriores.

Hay resultados de existencia y unicidad (1.3) en todos los libros y varios demuestran el TEyU; la muy larga y avanzada demostración del TE está en G. La prolongabilidad sólo suele ser tratada en los libros más rigurosos (como F y G); algo se dice sobre el tema en R, P y H.

La teoría general de estabilidad (1.4) es propia de libros más avanzados, como el G, y se suele tratar en el marco más general de los sistemas de ecuaciones. La mayoría de los libros más elementales (por ejemplo Bd y P) se suelen limitar a tratar la estabilidad de soluciones constantes de sistemas autónomos (en los apuntes en el capítulo 4). Algunos de ellos (como F) estudian también la estabilidad de sistemas y ecuaciones lineales con coeficientes constantes (2.4 en los apuntes). De dependencia continua hablan R, E, H, F y G.

La sección 1.5 sigue, en general, al P. Ideas interesantes (más avanzadas) se dan en F.

Para ampliar el cálculo numérico (1.6) está muy bien el capítulo 8 del Bd; véanse también R y Br.

La mayoría de los libros incluyen aplicaciones de las ecuaciones diferenciales a problemas reales; tal vez las más curiosas se encuentren en el Br.

Los teoremas generales de 2.1 se pueden estudiar en G.

Casi todos los libros empiezan estudiando directamente las ecuaciones lineales y después se ocupan de los sistemas, lo que tal vez resulte más pedagógico (los apuntes, para ahorrar tiempo, lo hacen al revés, pero es interesante leer alguna vez este otro camino). Además suelen incluir repasos, más o menos detallados, de la teoría de matrices (véase, por ejemplo, Bd, P, H o F), ocupándose algunos de la forma de Jordan.

La transformada de Laplace (2.5) se utiliza en Bd, Br, R, S y F.

Para ecuaciones con coeficientes periódicos (2.6), ver P.

La solución por medio de series (capítulo 3), tanto en torno a puntos regulares como en torno a singulares regulares, se puede consultar en Bd, S, Br y R. En S, por ejemplo, se puede ver alguna demostración no hecha en los apuntes. El mismo libro incluye un estudio sobre las propiedades de diferentes funciones especiales.

Los mapas de fases (capítulo 4) se tratan con detalle y rigor en el P (incluyendo la complicada demostración del teorema 1 de 4.2), aunque también son recomendables las diferentes formas de estudiarlos de Bd, Br, R y H. En varios de ellos se puede leer el estudio de las funciones de Lyapunov (para el análisis de la estabilidad de puntos críticos) y de los ciclos límite, no incluidos en los apuntes. Para resultados más avanzados sobre sistemas autónomos (bifurcación, caos...), consultar F.

Algunos libros pueden ser útiles para parte de Ecuaciones Diferenciales II. Bd, R, Br y S estudian los problemas de contorno para EDOs y el método de separación de variables para la resolución de EDPs lineales de segundo orden. Las EDPs de primer orden, lineales y no lineales, se tratan en E.

Hay un capítulo dedicado a la historia de las ecuaciones diferenciales en G, una pequeña sección en Bd y diversos apuntes históricos en S.

Otro tema relacionado con las ecuaciones diferenciales, el cálculo de variaciones, se ve en E y S. Y las ecuaciones en diferencias ocupan casi la mitad del libro F.

Introducción

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que aparecen derivadas de una función incógnita. Si tal función es de una variable la ecuación se llama **ordinaria** (EDO). Si es de varias variables, la ecuación es en **derivadas parciales** (EDP).

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias son:

[1] $y'(t)=-ay(t)$ [ecuación que rige la desintegración radiactiva]

[2] $y'(t)=by(t)[M-y(t)]$ [describe la evolución de una población animal]

[3] $(1-t^2)x''(t)-2tx'(t)+p(p+1)x(t)=0$ [ecuación del Legendre]

[4] $x''(t)+d\,\mathrm{sen}[x(t)]=0$ [ecuación del péndulo]

[5] $x^{iv}(t)+\lambda x(t)=0$ [ecuación de las vibraciones de una viga]

Y son ecuaciones en derivadas parciales, por ejemplo:

[6] $u_x^2+u_y^2=1$, con $u=u(x,y)$ [ecuación eikonal o de la óptica geométrica]

[7] $u_t-k[u_{xx}+u_{yy}]=F(x,y,t)$, $u=u(x,y,t)$ [ecuación del calor en el plano]

[8] $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$, con $u=u(x,t)$ [ecuación de la cuerda vibrante]

(en las ecuaciones anteriores, a, b, M, p, d, λ, k y c son constantes y las funciones F son conocidas).

Se llama **orden** de una ecuación al orden más alto de las derivadas que aparecen en ella. Así, [1] y [2] y la EDP [6] son de primer orden; [3] y [4] y las EDPs [7] y [8] de segundo orden, y la ecuación [5] es de cuarto orden. Una ecuación es **lineal** cuando las funciones incógnitas y sus derivadas sólo aparecen como polinomios de grado uno. Según esto, son lineales [1], [3], [5], [7] y [8] (aunque las F de las dos últimas sean lo complicadas que se quiera) y no lo son las otras tres, [2], [4] y [6].

Solución de una EDO de orden n es una función, n veces derivable, que al ser llevada a la ecuación la convierte en una identidad. Así, $y(t)=e^{-at}$ es solución de [1] pues $y'(t)=-ae^{-at}=-ay(t)$. Más aún, también lo es toda función $y(t)=Ce^{-at}$ para cualquier constante C. A esta expresión, que, como veremos, recoge todas las soluciones de la ecuación, se le llama **solución general**. Para precisar una **solución particular** será necesario imponer además alguna **condición inicial** (al conjunto de la ecuación y el dato inicial se le llama **problema de valores iniciales**). Para [1], de primer orden, basta imponer el valor de la solución en un instante t dado: por ejemplo, $y(0)=7$ determina $y(t)=7e^{-at}$. La solución general de una EDO de orden n contendrá n constantes arbitrarias y deberemos dar n datos iniciales (para [5], los valores de x, x', x'' y x''' en $t=0$ o en otro $t=t_o$; [5] más esos 4 datos será allí el problema de valores iniciales). [Las condiciones para aislar una solución única de una EDP son más complicadas y variadas].

Aunque sería nuestro principal deseo ante cualquier ecuación diferencial, **hallar su solución general sólo será posible en contadas ocasiones** (incluso para las EDOs de primer orden; será más difícil cuanto mayor sea su orden, más para las ecuaciones no lineales, y más aún para una EDP). Parte de la teoría de ecuaciones diferenciales (la más desarrollada en estos apuntes) describe los escasos métodos de resolución. Pero otra parte importante se dedica a obtener información sobre las soluciones de una ecuación **sin necesidad de resolverla**: ¿cuándo tiene un problema de valores iniciales solución única?, ¿qué aspecto tiene la gráfica de las soluciones?, ¿cómo se comportan asintóticamente?, ¿cómo calcular (con un ordenador) sus valores aproximados?, ...

Estos apuntes estudian las EDOs. El **capítulo 1** se dedica a las **ecuaciones de primer orden** $y'=f(t,y(t))$. Comienza describiendo los escasos métodos elementales de integración y pasa pronto al resto de su teoría: dibujo aproximado de las soluciones, existencia y unicidad (si las funciones que aparecen en la ecuación son discontinuas o no derivables puede que no haya solución o que haya más de una satisfaciendo un dato inicial), prolongabilidad (¿en qué intervalo está definida cada solución?), estabilidad (¿se parecen entre sí las soluciones con datos iniciales próximos para t grande?), ecuaciones autónomas (las de la forma $y'=f(y(t))$) y cálculo numérico.

El **capítulo 2** trata de los **sistemas de** n **ecuaciones de primer orden** y de las **ecuaciones de orden** n sobre los que más información se puede obtener y que más veces son resolubles: los **lineales**. Primero se generalizan las propiedades vistas de las ecuaciones de primer orden. Luego se tratan, para ir fijando ideas, los sistemas de 2 ecuaciones lineales y las ecuaciones lineales de orden 2 (siempre resolubles si los coeficientes son constantes). Se pasa después al orden n general (se podrán resolver ya menos veces), se estudia su estabilidad y se introduce la técnica de resolución mediante transformadas de Laplace. Hay una breve sección sobre soluciones periódicas de lineales.

El **capítulo 3** describe cómo resolver las EDOs lineales de segundo orden con coeficientes variables utilizando **series de potencias** (único método posible en la mayoría de las ocasiones), en torno a los llamados puntos regulares y a los singulares regulares, incluido el llamado punto del infinito. Se aplica este método a tres ecuaciones particulares de interés físico: la de Legendre, la de Hermite y la de Bessel.

El **capítulo 4** estudia los dibujos (llamados **mapas de fases)** de las proyecciones sobre un plano de las soluciones de los sistemas de dos ecuaciones autónomas, sistemas en los que casi nunca se puede hallar su solución general (pero muchas de las propiedades de las soluciones estarán a la vista en el mapa de fases). Tras tratar las propiedades generales, clasifica los mapas de fase en las cercanías de los puntos proyección de soluciones constantes (basándose en los dibujos sencillos de los sistemas lineales), trata un tipo concreto de sistemas (los exactos) y acaba analizando casos dudosos de la clasificación citada.