Variable Compleja

Artemio González López

Madrid, septiembre de 2003

Índice general

Capítulo 1

Funciones analíticas

1.1. Definición y propiedades algebraicas de los números complejos

Definición 1.1. $\mathbf{C} = \{\mathbf{R}^2, +, \cdot\}$, con la **suma** y el **producto** definidos por

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Justificación:

- La suma y la multiplicación de los pares de la forma $(x, 0) \in \mathbf{C}$ coinciden con la de los números reales $x \in \mathbf{R}$

  $\Longrightarrow (x, 0) \leftrightarrow x \in \mathbf{R}$

  $\Longrightarrow \mathbf{R} \cong \{(x, 0) : x \in \mathbf{R}\} \subset \mathbf{C}$

- $i = (0, 1) \Longrightarrow i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$

- $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = x + i\,y$

  $$\Longrightarrow (x_1 + i\,y_1)(x_2 + i\,y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

  es la fórmula "tradicional" para multiplicar los números complejos $x_1 + i\,y_1$ y $x_2 + i\,y_2$.

- $z = x + i\,y \Longrightarrow x = \operatorname{Re} z, \;\; y = \operatorname{Im} z.$

- Al ser $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ (como *conjuntos*), la **igualdad** en $\mathbf{C}$ se define mediante

  $$z = x + i\,y = w = u + i\,v \iff x = u, y = v$$

  En particular,

  $$z = x + i\,y = 0 \iff x = y = 0.$$

Proposición 1.2. $\mathbf{C}$ *es un* **cuerpo***: para todo* $z, w, s \in \mathbf{C}$ *se cumple*

$$z + w = w + z \qquad\qquad z\,w = w\,z$$
$$z + (w + s) = (z + w) + s \qquad\qquad z\,(w\,s) = (z\,w)\,s$$
$$z + 0 = z \qquad\qquad 1\,z = z$$
$$\exists -z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } z + (-z) = 0 \qquad\qquad z \neq 0 \Longrightarrow \exists z^{-1} \in \mathbf{C} \text{ t.q. } z\,z^{-1} = 1$$
$$z(w + s) = z\,w + z\,s.$$

Demostración. Obviamente, $z = x + i\,y \implies -z = -x - i\,y$. La existencia de inverso resp. del producto para todo $z = x + i\,y \neq 0$ se deduce del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} z^{-1} = u + i\,v \implies z\,z^{-1} &= (x\,u - y\,v) + i(x\,v + y\,u) = 1 \\ &\iff \begin{cases} x\,u - y\,v = 1 \\ y\,u + x\,v = 0 \end{cases} \\ &\iff u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad (z \neq 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \neq 0) \\ &\iff z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \mathrm{i}\,\frac{y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Notación: $\dfrac{z}{w} = z\,w^{-1}$, $\quad z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ veces}}$ $(n \in \mathbf{N})$.

• $\mathbf{C}$ *no* es un cuerpo ordenado: si lo fuera,

$$i^2 = i \cdot i = -1 \geq 0.$$

• *Raíces cuadradas* (método algebraico):
Si $z = x + \mathrm{i}\,y$, queremos hallar todos los $w = u + \mathrm{i}\,v \in \mathbf{C}$ tales que $w^2 = z$:

$$\begin{aligned} w^2 = z &\iff u^2 - v^2 + 2\,\mathrm{i}\,u\,v = x + \mathrm{i}\,y \\ &\iff \begin{cases} u^2 - v^2 = x \\ 2\,u\,v = y \end{cases} \\ &\implies x^2 + y^2 = (u^2+v^2)^2 \implies u^2 + v^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\ &\implies u^2 = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2+y^2}), \quad v^2 = \frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2+y^2}) \\ &\implies w = \begin{cases} \pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}} + \mathrm{i}\,\operatorname{sig} y\,\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right), & y \neq 0 \\ \pm\sqrt{x}, & y = 0, \;\; x \geq 0 \\ \pm i\sqrt{-x}, & y = 0, \;\; x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Las raíces cuadradas de un número complejo $z \neq 0$ son *dos* números complejos distintos (de signos opuestos). Las raíces cuadradas de z son *reales* si y sólo si $z \in \mathbf{R}^+ \cup \{0\}$, e **imaginarias puras** si y sólo si $z \in \mathbf{R}^-$.

Ejemplo 1.3. Las raíces cuadradas de $3 - 4\,i$ son

$$\pm\left(\sqrt{\frac{8}{2}} - \mathrm{i}\sqrt{\frac{2}{2}}\right) = \pm(2 - i).$$

Los siguientes resultados, bien conocidos en el campo real, son consecuencia inmediata de la estructura de cuerpo que posee $\mathbf{C}$:

- Las ecuaciones cuadráticas con coeficientes *complejos* se pueden resolver utilizando la fórmula usual:

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \iff z = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \qquad a, b, c \in \mathbf{C}.$$

- El teorema del binomio de Newton es válido en el campo complejo:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}\,, \qquad a, b \in \mathbf{C},\ n \in \mathbf{N}\,.$$

1.2. Módulo y argumento. Fórmula de de Moivre. Raíces. Conjugación.

- Geométricamente, los números complejos se pueden identificar con los puntos del plano haciendo corresponder al complejo $z = x + \mathrm{i}\,y$ el punto (x, y). De ahí que el conjunto $\mathbf{C}$ reciba el nombre de *plano complejo*. Es también corriente cuando se utiliza esta representación geométrica de $\mathbf{C}$ denominar *eje real* al eje horizontal y *eje imaginario* al vertical (fig. 1.1).

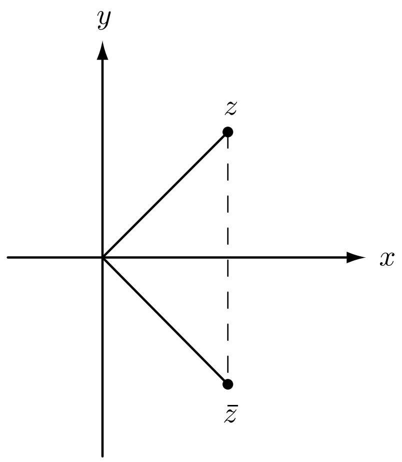

Figura 1.1: Plano complejo.

- Si $z = x + \mathrm{i}\,y \in \mathbf{C}$, se definen el *módulo* y el *complejo conjugado* de z respectivamente como sigue:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{(distancia al origen)}$$
$$\bar{z} = x - \mathrm{i}\,y \quad \text{(reflexión respecto del eje real)}$$

$\Longrightarrow \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}),\ \ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

- Propiedades:

  i) $\bar{\bar{z}} = z$

  ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \overline{w}$

  iii) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \overline{w} \Longrightarrow \overline{1/z} = 1/\bar{z}$

  iv) $|\bar{z}| = |z|$

  v) $z\bar{z} = |z|^2 \Longrightarrow \begin{cases} z \neq 0 \Rightarrow z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2} \\ |z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = z^{-1} \end{cases}$

VI) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ (elevar al cuadrado) $\Longrightarrow \left|z^{-1}\right| = |z|^{-1}$

VII) $w \neq 0 \Longrightarrow \overline{z/w} = \bar{z}/\overline{w}, \quad |z/w| = |z| \,/\, |w|$
(consecuencia de III) y VI))

VIII) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|\,, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z| \qquad (-\,|z| \leq \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \leq |z|)$

- *Desigualdad triangular:* $|z+w| \leq |z| + |w|$

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = |z|^2 + |w|^2 + (z\overline{w} + \bar{z}w) = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| = (|z|+|w|)^2.\end{aligned}$$

- Consecuencias:

I) $||z| - |w|| \leq |z - w|$

$$|z| = |(z-w) + w| \leq |z-w| + |w| \Longrightarrow |z| - |w| \leq |z-w|\,;$$

cambiando z por w se obtiene $|w| - |z| \leq |z-w|$.

II) $|z| > |w| \Longrightarrow \dfrac{1}{|z-w|} \leq \dfrac{1}{|z| - |w|}$

1.2.1. Argumento

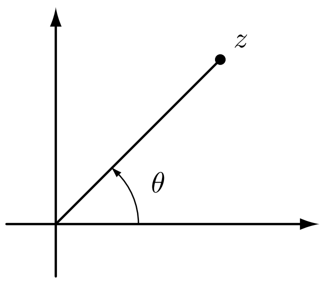

Figura 1.2: Definición de argumento.

- Dado $0 \neq z \in \mathbf{C}$, existe $\theta \in \mathbf{R}$ t.q.

$$z = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\,\operatorname{sen}\theta) \qquad \text{(fig. 1.2)}.$$

El número θ está definido módulo un múltiplo entero de 2π. Por ejemplo,

$$z = 1 \Longrightarrow \theta \in \{0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots\} = \{2\,k\,\pi : k \in \mathbf{Z}\}\,.$$

Definición 1.4. $\arg z$ (**argumento** de z): cualquier θ t.q. $z = |z|\,(\cos\theta + \mathrm{i}\,\operatorname{sen}\theta)$.

$\Longrightarrow$ arg *no* es una función.

$\arg z$ = cualquiera de los ángulos orientados formados por el vector z con el eje real positivo.

Ejemplos:

$$\begin{gathered}\arg i \in \{\pi/2 + 2\,k\,\pi : k \in \mathbf{Z}\} \\ \arg(-1-i) \in \{5\pi/4 + 2\,k\,\pi : k \in \mathbf{Z}\} = \{-3\pi/4 + 2\,k\,\pi : k \in \mathbf{Z}\}\,.\end{gathered}$$

- Para que θ sea *único,* basta imponerle la condición adicional de que pertenezca a un cierto intervalo semiabierto I de longitud 2π (como $[0, 2\pi)$, $(-\pi, \pi]$, etc.) Escoger este intervalo I se conoce como tomar una **determinación** del argumento $\Longrightarrow \arg_I : \mathbf{C} - \{0\} \to I$

- $\arg_I(z) =$ *único* valor de $\arg z$ que pertenece a I

  Ejemplo: $\arg_{[0,2\pi)}(-1 - i) = 5\pi/4$, $\arg_{(-\pi,\pi]}(-1 - i) = -3\pi/4$.

- **Determinación principal** del argumento:

$$\operatorname{Arg} = \arg_{(-\pi,\pi]}$$

Ejemplo:

	1	i	-1	$-1-i$	$-i$	$1-i$
Arg	0	$\pi/2$	π	$-3\pi/4$	$-\pi/2$	$-\pi/4$

- Claramente, $\operatorname{Arg} : \mathbf{C} - \{0\} \to (-\pi, \pi]$ es discontinua en $\mathbf{R}^- \cup \{0\}$. Análogamente, $\arg_{[0,2\pi)}$ es discontinua en $\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$. En general, $\arg_{[\theta_0,\theta_0+2\pi)}$ (ó $\arg_{(\theta_0,\theta_0+2\pi]}$) es discontinua en la semirrecta cerrada que forma un ángulo θ_0 con el semieje real positivo.

- Forma *trigonométrica* ó *polar* de los números complejos:

$$z \neq 0 \Longrightarrow z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\operatorname{sen}\theta), \qquad r = |z|\,, \quad \theta = \arg z.$$

- $z, w \neq 0;\ \ z = w \iff \big(|z| = |w|\,,\quad \arg z = \arg w \mod 2\pi\big)$.

- Interpretación geométrica del producto en $\mathbf{C}$:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\,\operatorname{sen}\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\,\operatorname{sen}\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2)\right] \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1+\theta_2) + \mathrm{i}\,\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2)\right] \end{aligned}$$

  De este cálculo se sigue que $|z_1\, z_2| = |z_1|\; |z_2|$ y

$$\arg(z_1\, z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad \mod 2\pi. \tag{1.1}$$

- $\operatorname{Arg}(z_1\, z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$. Por ej.,

$$\operatorname{Arg}(-i) = -\pi/2 \neq \operatorname{Arg}(-1) + \operatorname{Arg} i = 3\pi/2.$$

- Consecuencias:

$$\begin{aligned} (zz^{-1} = 1 \Rightarrow) &\qquad \arg(z^{-1}) = -\arg z &&\mod 2\pi \\ (z\bar{z} = |z|^2 \geq 0 \Rightarrow) &\qquad \arg(\bar{z}) = -\arg z &&\mod 2\pi \\ (w \neq 0 \Rightarrow z/w \cdot w = z \Rightarrow) &\qquad \arg(z/w) = \arg z - \arg w &&\mod 2\pi. \end{aligned}$$

1.2.2. Fórmula de de Moivre

- A partir de (1.1) se demuestra por inducción la fórmula de de Moivre:

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) \Longrightarrow z^n = r^n\big[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\theta)\big], \quad n \in \mathbf{N}.$$

- $z^{-1} = r^{-1}\big[\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta)\big] \Longrightarrow$ la fórmula vale para todo $n \in \mathbf{Z}$.
  Ejemplo:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 &= \cos(3\theta) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(3\theta)\\ &= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta) + i(3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\theta\\ \\ \mathrm{sen}(3\theta) = 3\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - \mathrm{sen}^3\theta.\end{cases}$$

1.2.3. Raíces n-ésimas

- Si $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) \neq 0$, hallemos todas las soluciones $w \in \mathbf{C}$ de la ecuación $w^n = z$ $(n \in \mathbf{N})$:

$$\begin{aligned}w \neq 0 &\Longrightarrow w = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\varphi)\\ w^n &= \rho^n\big[\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}(n\varphi)\big] = r(\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)\\ &\Longleftrightarrow \begin{cases}\rho^n = r \Leftrightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \equiv r^{1/n}\\ \\ n\varphi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}\end{cases}\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow\ w = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$\Longrightarrow$ *un número complejo no nulo tiene n raíces n-ésimas distintas.*
Ejemplo:

$$\begin{aligned}w^3 = i \iff w &= \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2\\ \iff w &= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i),\ \frac{1}{2}(-\sqrt{3} + i),\ -i.\end{aligned}$$

- En particular, las n raíces n-ésimas de la unidad ($z = 1$) son los números

$$\epsilon_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

  (vértices de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia unidad).

- Nótese que $\epsilon_k = \epsilon^k$, siendo $\epsilon = \epsilon_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$.
  Ejemplo: las raíces sextas de la unidad son

$$\begin{aligned}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^k &= \frac{1}{2^k}(1 + i\sqrt{3})^k, \quad k = 0, 1, \dots, 5\\ &= 1,\ \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}),\ -1,\ -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Ejercicio. Probar que las n raíces n-ésimas de $z \neq 0$ están dadas por

$$\sqrt[n]{z} \cdot \epsilon^k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

donde $\sqrt[n]{z}$ denota *cualquier* raíz n-ésima de z.

1.3. La función exponencial, funciones trigonométricas e hiperbólicas, logaritmos y potencias

1.3.1. Función exponencial

Si $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^t &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \\ \cos t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \\ \operatorname{sen} t &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

Sea $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbf{C}$; la propiedad $\mathrm{e}^{t_1+t_2} = \mathrm{e}^{t_1}\mathrm{e}^{t_2}$ sugiere definir $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{iy}$. A su vez, procediendo formalmente se obtiene

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{y^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y \quad (\text{ya que } i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k). \end{aligned}$$

Definición 1.5. Para todo $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbf{C}$ ($x, y \in \mathbf{R}$), definimos

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x (\cos y + \mathrm{i} \operatorname{sen} y).$$

Nota: Si $z \in \mathbf{R}$, la exponencial compleja se reduce a la exponencial real.

Valores particulares:

$$\mathrm{e}^0 = 1, \;\; \mathrm{e}^{i\pi/2} = i, \;\; \mathrm{e}^{-i\pi} = -1, \;\; \mathrm{e}^{3\pi i/2} = -i, \;\; \mathrm{e}^{2\pi i} = 1.$$

Propiedades: Para todo $z, w \in \mathbf{C}$ se tiene

i) $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w$.

ii) $\mathrm{e}^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbf{C}$.

iii) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}$, $\quad \arg(\mathrm{e}^z) = \operatorname{Im} z \mod 2\pi$.

iv) $\mathrm{e}^z = 1 \iff z = 2k\pi i$, con $k \in \mathbf{Z}$.

v) e^z es una función periódica, cuyos períodos son los números $2k\pi i$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Demostración:

I) $z = x + \mathrm{i}\, y$, $w = u + \mathrm{i}\, v \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z \mathrm{e}^w &= \mathrm{e}^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)\mathrm{e}^u(\cos v + i \operatorname{sen} v) \\ &= \mathrm{e}^{x+u} \left[\cos y \cos v - \operatorname{sen} y \operatorname{sen} v + i(\operatorname{sen} y \cos v + \cos y \operatorname{sen} v)\right] \\ &= \mathrm{e}^{x+u} \left[\cos(y+v) + \mathrm{i}\ \operatorname{sen}(y+v)\right] = \mathrm{e}^{z+w}. \end{aligned}$$

II) $\mathrm{e}^0 = 1 \Longrightarrow \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{-z} = 1 \Longrightarrow (\mathrm{e}^z)^{-1} = \mathrm{e}^{-z}$.

III) Obvio.

IV) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = 1 \iff \mathrm{e}^x = 1,\ \ y = 0 \mod 2\pi$

$\iff x = 0,\ \ y = 2k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

V) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z+w} \iff \mathrm{e}^w = 1 \iff w = 2k\pi i\ (k \in \mathbf{Z})$.

- $z = |z|\, \mathrm{e}^{i \arg z}$; $\quad \overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\bar{z}}$.

1.3.2. Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Si y es real entonces

$$\mathrm{e}^{iy} = \cos y + \mathrm{i}\ \operatorname{sen} y,\ \ \mathrm{e}^{-iy} = \cos y - \mathrm{i}\ \operatorname{sen} y$$
$$\Longrightarrow \cos y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{iy} + \mathrm{e}^{-iy}\right),\ \ \operatorname{sen} y = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{iy} - \mathrm{e}^{-iy}\right).$$

Definición 1.6. Para todo $z \in \mathbf{C}$ se define

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}\right),\ \ \operatorname{sen} z = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}\right).$$

(De nuevo, si z es real $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ se reducen a las correspondientes funciones reales.)

Propiedades: para todo $z, w \in \mathbf{C}$ se tiene

I) $\cos(-z) = \cos(z)$, $\quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$.

II) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w$,

$\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$.

III) $\cos z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + z\right)$.

IV) $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$.

V) $\overline{\cos z} = \cos(\bar{z})$, $\quad \overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen}(\bar{z})$.

VI) $\operatorname{sen} z = 0 \iff z = k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$.

VII) $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son funciones periódicas de período $2k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$.

Demostración:

I) Trivial.

ii) Por ejemplo

$$\begin{aligned}\cos z\cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w &= \frac{1}{4}\left(e^{iz}+e^{-iz}\right)\left(e^{iw}+e^{-iw}\right)+\frac{1}{4}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)\left(e^{iw}-e^{-iw}\right)\\ &= \frac{1}{2}(e^{iz}e^{iw}+e^{-iz}e^{-iw}) = \cos(z+w).\end{aligned}$$

iii) Caso particular de las fórmulas anteriores

iv) Hacer $w=-z$ en la fórmula para $\cos(z+w)$.

v) Consecuencia de $\overline{e^{w}} = e^{\overline{w}}$.

vi) $\operatorname{sen} z = 0 \iff e^{iz} - e^{-iz} = 0 \iff e^{2iz} = 1 \iff 2iz = 2k\pi i$ $(k \in \mathbf{Z}) \iff z = k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

vii) Por el apartado iii), basta probar la afirmación para la función sen. La igualdad $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z$ es equivalente a $(e^{i(2z+w)}-1)(e^{iw}-1)=0$. Para que esta igualdad se cumpla para todo $z\in\mathbf{C}$ para un w fijo es necesario y suficiente que $e^{iw}-1=0$, es decir que iw sea un múltiplo entero de $2\pi i$.

- $\tan z = \operatorname{sen} z/\cos z$, $\sec z = 1/\cos z$ $(z \neq \pi/2 + k\pi,\ k\in\mathbf{Z})$;
  $\cot z = \cos z/\operatorname{sen} z = 1/\tan z$, $\csc z = 1/\operatorname{sen} z$ $(z\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z})$.

Funciones hiperbólicas: para todo $z\in\mathbf{C}$ se define

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z}+e^{-z}\right), \quad \operatorname{senh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z}-e^{-z}\right).$$

- $\cosh z = \cos(iz)$, $\operatorname{senh} z = -i\operatorname{sen}(iz)$

De aquí se deducen las propiedades de las funciones hiperbólicas. Por ejemplo:

- $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$.
- $$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} x\cos(iy) + \cos x \operatorname{sen}(iy)\\ &= \operatorname{sen} x\cosh y + \mathrm{i}\cos x\operatorname{senh} y.\end{aligned}$$
- $\tanh z = \operatorname{senh} z/\cosh z = -i\tan(iz)$ $(z\neq i\pi/2 + k\pi i,\ k\in\mathbf{Z})$.

1.3.3. Logaritmos

- En $\mathbf{R}$, $\exp:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ $(\exp(t) = e^t)$ es una aplicación biyectiva. Su inversa es la función $\log:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$. Por definición,

$$\log x = y \iff x = e^y \quad (\Longrightarrow x>0).$$

- En $\mathbf{C}$, exp no es invertible al no ser inyectiva (por ser periódica). De hecho, se tiene:

$$\begin{aligned}&e^w = z \Longrightarrow z\neq 0;\\ &w = u+\mathrm{i}\,v \Longrightarrow e^u(\cos v + i\operatorname{sen} v) = z \neq 0\\ &\iff \begin{cases} e^u = |z| \Leftrightarrow u = \log|z| \\ v = \arg z \mod 2\pi\end{cases}\\ &\iff w = \log|z| + \mathrm{i}\arg z \mod 2\pi\mathrm{i}.\end{aligned}$$

- Si $z \neq 0$, la ecuación $\mathrm{e}^w = z$ tiene *infinitas* soluciones, que difieren entre sí en múltiplos enteros de $2\pi i$. Si I es un intervalo semiabierto de longitud 2π, podemos escribir
$$z \neq 0, \;\; \mathrm{e}^w = z \iff w = \log|z| + \mathrm{i}\arg_I z + 2k\pi i, \;\; k \in \mathbf{Z}.$$
A cada uno de estos (infinitos) w se les denomina **logaritmos** de $z \neq 0$.
Ejemplo:
$$\mathrm{e}^w = -2i \iff w = \log 2 - \frac{i\pi}{2} + 2k\pi i \quad (k \in \mathbf{Z}).$$

Definición 1.7. Se define la **determinación** I del logaritmo mediante
$$\log_I z = \log|z| + i\arg_I z, \qquad \forall z \neq 0.$$

- Nótese que $\log_I : \mathbf{C} - \{0\} \to \{s \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} s \in I\}$ es una *función.*
- La **determinación principal** del logaritmo se define por
$$\operatorname{Log} = \log_{(-\pi,\pi]}.$$

Ejemplo: $\operatorname{Log}(-2i) = \log 2 - \frac{i\pi}{2}$, $\operatorname{Log}(-1) = i\pi$, $\operatorname{Log}(1-i) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{i\pi}{4}$.

Propiedades:

i) Para todo $z \neq 0$, $\mathrm{e}^{\log_I z} = z$.

ii) $\log_I(\mathrm{e}^w) = w \mod 2\pi i$. En particular, $\log_I(\mathrm{e}^w) = w \iff \operatorname{Im} w \in I$.

iii) $\log_I : \mathbf{C} - \{0\} \to \{s \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} s \in I\}$ es biyectiva.

iv) $z, w \neq 0 \Longrightarrow \log_I(z \cdot w) = \log_I z + \log_I w \mod 2\pi i$.

Demostración:

i) $z \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{e}^{\log_I z} = \mathrm{e}^{\log|z| + i\arg_I z} = \mathrm{e}^{\log|z|}\mathrm{e}^{i\arg_I z} = |z|\,\mathrm{e}^{i\arg_I z} = z$.

ii) $w = u + \mathrm{i}\,v \Longrightarrow \log_I(\mathrm{e}^w) = \log(\mathrm{e}^u) + i\arg_I(\mathrm{e}^w) = u + \mathrm{i}\,v \mod 2\pi i$, ya que $\arg_I(\mathrm{e}^w) = \operatorname{Im} w \mod 2\pi i$. $\log_I(\mathrm{e}^w) = w \Longrightarrow \operatorname{Im} w \in I$ porque $\operatorname{Im}(\log_I z) \in I$ para todo $z \neq 0$. Recíprocamente, si $\operatorname{Im} w \in I$ entonces $\log_I(\mathrm{e}^w) = w$ porque ambos miembros son iguales módulo $2\pi i$ y sus partes imaginarias pertenecen a I.

iii) Hay que probar que para todo w con $\operatorname{Im} w \in I$ existe un único $z \in \mathbf{C} - \{0\}$ tal que $\log_I z = w$. Esto es cierto por los apartados anteriores, siendo $z = \mathrm{e}^w$.

iv) Las exponenciales de ambos miembros coinciden; por tanto, esta propiedad se sigue de la prop. ii). Otra forma de deducir esta propiedad es observando que
$$\begin{aligned}
\log_I(zw) &= \log|zw| + i\arg_I(zw) \\
&= \log(|z|\cdot|w|) + i(\arg_I z + \arg_I w) \mod 2\pi i \\
&= \log|z| + \log|w| + i(\arg_I z + \arg_I w) \mod 2\pi i \\
&= (\log|z| + i\arg_I z) + (\log|w| + i\arg_I w) \mod 2\pi i \\
&= \log_I z + \log_I w \mod 2\pi i.
\end{aligned}$$

Nota: En general, $\operatorname{Log}(zw) \neq \operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$. Por ejemplo,
$$\operatorname{Log}(-i) = -\frac{\pi i}{2} \neq \operatorname{Log}(-1) + \operatorname{Log} i = i\pi + \frac{i\pi}{2} = \frac{3\pi i}{2}.$$

1.3.4. Potencias complejas

Si $a, b \in \mathbf{C}$ y $a \neq 0, e$, definimos

$$a^b = \mathrm{e}^{b \log a} \quad \text{donde} \quad \log a = \log_I a + 2k\pi i, \ \ k \in \mathbf{Z}.$$

Por tanto, en general a^b denota un *conjunto* de números complejos:

$$a^b = \mathrm{e}^{2kb\pi i} \mathrm{e}^{b \log_I a}, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Más concretamente, se tiene:

I) $b \in \mathbf{Z} \Longrightarrow a^b$ tiene un valor único ($= \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{b \text{ veces}}$).

II) Si $b = p/q \in \mathbf{Q}$, con $p \in \mathbf{Z}$ y $1 < q \in \mathbf{N}$ primos entre sí, entonces $a^b = a^{p/q}$ toma exactamente q valores (las q raíces q-ésimas de a^p).

III) En los demás casos ($b \in \mathbf{C} - \mathbf{Q}$), a^b tiene infinitos valores que difieren entre sí en un factor de la forma $\mathrm{e}^{2kb\pi i}$, con $k \in \mathbf{Z}$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(-1+i)^i &= \mathrm{e}^{i[\mathrm{Log}(-1+i)+2k\pi i]} = \mathrm{e}^{-2k\pi} \mathrm{e}^{i\left(\frac{1}{2}\log 2 + \frac{3\pi i}{4}\right)} \quad (k \in \mathbf{Z}) \\ &= \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{4} + 2n\pi} \mathrm{e}^{\frac{i}{2}\log 2} \quad (n \in \mathbf{Z}).\end{aligned}$$

- Si $a \neq 0$, cada determinación de log define una función $a^z (= \mathrm{e}^{z \log_I a})$.

Ejercicio: dados $a, b \in \mathbf{C}$ con $a \neq 0$, estudiar si se cumple la igualdad

$$a^{b+c} = a^b \, a^c.$$

1.4. Límites y continuidad

Algunos conceptos topológicos:

I) Disco abierto de centro $a \in \mathbf{C}$ y radio $r > 0$ (**entorno**):

$$D(a; r) = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| < r\}.$$

II) **Entorno perforado** de $a \in \mathbf{C} \equiv D(a; r) - \{a\} = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - a| < r\}$.

III) $A \subset \mathbf{C}$ es **abierto** si contiene un entorno de cada uno de sus puntos:

$$\forall a \in A, \ \exists r > 0 \quad \text{t.q.} \quad D(a; r) \subset A.$$

IV) $A \subset \mathbf{C}$ **cerrado** $\iff$ $\mathbf{C} - A$ es abierto.

V) $A \subset \mathbf{C}$ es **compacto** $\iff$ A es cerrado y acotado ($\exists R > 0$ t.q. $A \subset D(0; R)$).

VI) $A \subset \mathbf{C}$ *abierto* es **conexo** si para todo par de puntos $z, w \in A$ hay una curva *continua* $\gamma : [0, 1] \to A$ t.q. $\gamma(0) = z$, $\gamma(1) = w$.

VII) Una **región** ó **dominio** es un subconjunto abierto conexo y no vacío de $\mathbf{C}$.

1.4.1. Límites

Notación:

- En lo que sigue, A y B denotan conjuntos *abiertos*,

$$\begin{gathered} f : A \to \mathbf{C} \\ z = x + \mathrm{i}\, y \mapsto f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y). \end{gathered}$$

- $u : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ y $v : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ (la parte real e imaginaria de f, resp.) son funciones escalares *reales*.
- Si $f : A \to \mathbf{C}$ está definida en $A - \{a\}$ y $l \in \mathbf{C}$, $\lim\limits_{z\to a} f(z) = l \iff$

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ t.q. } z \in A \text{ y } 0 < |z - a| < \delta \Longrightarrow |f(z) - l| < \epsilon.$$

Propiedades de los límites:

i) Si existe (es un número complejo) $\lim_{z\to a} f(z)$, dicho límite es único.

ii) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = l \iff \lim\limits_{(x,y)\to a} u(x, y) = \operatorname{Re} l$ y $\lim\limits_{(x,y)\to a} v(x, y) = \operatorname{Im} l$.

iii) $\lim\limits_{z\to a} [f(z) + g(z)] = \lim\limits_{z\to a} f(z) + \lim\limits_{z\to a} g(z)$.

iv) $\lim\limits_{z\to a} [f(z)g(z)] = \lim\limits_{z\to a} f(z) \cdot \lim\limits_{z\to a} g(z)$.

v) $\lim\limits_{z\to a} g(z) \neq 0 \Longrightarrow \lim\limits_{z\to a} \dfrac{1}{g(z)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{z\to a} g(z)}$.

Nota: En iii) y iv), la existencia del MD implica la del MI, pero no nec. viceversa.

Demostración:
i)–iii) son propiedades conocidas de los límites de funciones $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$
iv)–v) se demuestran como en el caso real (reemplazando el valor absoluto por el módulo).

1.4.2. Continuidad

- $f : A \to \mathbf{C}$ definida en A es **continua** en $a \in A$ si $\lim\limits_{z\to a} f(z) = f(a)$.
  En particular, f continua en $a \Longrightarrow f$ definida en un entorno de a.
- $f : A \to \mathbf{C}$ continua en A si y sólo si f es continua en todos los puntos de A.

Propiedades:

i) f y g continuas en $a \Longrightarrow f + g$ y fg continuas en a.

ii) Si, además, $g(a) \neq 0$, entonces f/g es continua en a.

iii) $f : A \to \mathbf{C}$ continua en a y $h : B \to \mathbf{C}$ continua en $f(a) \in B \Longrightarrow h \circ f$ continua en a.

Ejemplo: los polinomios y las funciones racionales son continuos en todos los puntos de su dominio.

1.5. Derivabilidad

- $f : A \to \mathbf{C}$ definida en A es **derivable (en sentido complejo)** en $a \in A$ si existe

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \equiv f'(a).$$

- $f : A \to \mathbf{C}$ es **analítica** (ó **holomorfa**) en A si es derivable en todos los puntos de A.

- f es analítica en C (conjunto *arbitrario*) si es analítica en un abierto $A \supset C \iff f$ es analítica en un entorno de cada punto de C.
  En particular, f es analítica en a si es derivable en un entorno de a.
  (Nótese que f *analítica en* a es más fuerte que f *derivable en* a.)

- $f : A \to \mathbf{C}$ derivable en $a \in A \implies f$ continua en a:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to a}[f(z) - f(a)] &= \lim_{z\to a}\left[\frac{f(z) - f(a)}{z - a}\cdot(z - a)\right] = \lim_{z\to a}\frac{f(z) - f(a)}{z - a}\cdot\lim_{z\to a}(z - a)\\ &= f'(a)\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Propiedades algebraicas:
Si $f : A \to \mathbf{C}$ y $g : A \to \mathbf{C}$ son derivables en $z \in A$, y $a, b \in \mathbf{C}$, se tiene:

i) $a\,f + b\,g$ es derivable en z, siendo $(a\,f + b\,g)'(z) = a\,f'(z) + b\,g'(z)$.

ii) fg es derivable en z, siendo $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$.

iii) Si $g(z) \neq 0$, f/g es derivable en z y

$$(f/g)'(z) = \frac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}.$$

Ejemplo: polinomios y funciones racionales.

1.5.1. Ecuaciones de Cauchy–Riemann

- Sea $a = a_1 + \mathrm{i}\,a_2 \in \mathbf{C}$, y sea $M_a : \mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C} \equiv \mathbf{R}^2$ la aplicación lineal definida por $M_a \cdot z = a\,z$, $\forall z \in \mathbf{C}$. Entonces la matriz de M_a (en la base canónica $\{1, i\}$ de $\mathbf{R}^2$) es $\begin{pmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$.

- $f : A \to \mathbf{C}$ definida en el abierto A es diferenciable (en sentido real) en $z_0 \in A$ si existe una aplicación lineal $Df(z_0) : \mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{C} \to \mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{C}$ tal que

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - Df(z_0)\cdot(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0.$$

  (Nótese que el módulo de $z = x + \mathrm{i}\,y$ es la norma del vector (x, y).) A la aplicación $Df(z_0)$ se le denomina derivada (en sentido real) de f en z_0.

Teorema 1.8. *Sea $f = u + \mathrm{i}\, v : A \to \mathbf{C}$ definida en el abierto A, y sea $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0 \in A$. Entonces f es derivable en sentido complejo en z_0 si y sólo si se cumple:*

I) *f es diferenciable en sentido real en (x_0, y_0).*

II) *Se satisfacen las* **ecuaciones de Cauchy–Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Demostración.
$\Longrightarrow$) f es diferenciable (en sentido real) en $z_0 = (x_0, y_0)$ con derivada $Df(z_0) = M_{f'(z_0)}$, ya que

$$\begin{aligned}
&\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)}{z - z_0} \right| \\
&= \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| = 0.
\end{aligned}$$

Sea $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0)$, y análogamente u_y, v_x, v_y. Igualando la matriz de $Df(z_0)$ en la base canónica de $\mathbf{R}^2$ (matriz jacobiana) con la de $M_{f'(z_0)}$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} f'(z_0) & -\operatorname{Im} f'(z_0) \\ \operatorname{Im} f'(z_0) & \operatorname{Re} f'(z_0) \end{pmatrix},$$

de donde se obtienen las ecs. de Cauchy–Riemann, junto con las relaciones

$$f'(z_0) = u_x + \mathrm{i}\, v_x = v_y - \mathrm{i}\, u_y.$$

$\Longleftarrow$) Por las ecs. de Cauchy–Riemann, la matriz jacobiana de f en z_0 es

$$\begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} = M_c,$$

siendo $c = u_x + \mathrm{i}\, v_x$. De esto se sigue que $Df(z_0) \cdot (z - z_0) = c(z - z_0)$, y por tanto

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - c(z - z_0)|}{|z - z_0|} &= \lim_{z \to z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right| \\
\Longleftrightarrow \exists f'(z_0) = c \equiv u_x + \mathrm{i}\, v_x = v_y - \mathrm{i}\, u_y.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

• De la demostración del teorema se sigue que si $f = u + \mathrm{i}\, v$ es derivable en sentido complejo en $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0$ entonces

$$\begin{aligned}
f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + \mathrm{i}\, v_x(x_0, y_0) &\equiv \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \\
= v_y(x_0, y_0) - \mathrm{i}\, u_y(x_0, y_0) &\equiv \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(z_0).
\end{aligned}$$

• El teorema anterior puede formularse también de la siguiente forma alternativa:

Teorema 1.9. *Sea $f : A \to \mathbf{C}$ definida en un abierto A, y sea $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0 \in A$. Entonces f es derivable en sentido complejo en z_0 si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:*

I) *f es diferenciable en sentido real en (x_0, y_0)*

II) *Existe $c \in \mathbf{C}$ tal que $Df(x_0, y_0) = M_c$.*

Además, si f es derivable en z_0 entonces $c = f'(z_0)$.

• $f : A \to \mathbf{C}$ analítica en una *región* A y $f' = 0$ en $A \Longrightarrow f$ constante en A.
En efecto, f derivable en sentido complejo en a implica que f es derivable en sentido real en dicho punto, siendo $Df(a) = M_{f'(a)} = 0$. El resultado anterior se sigue entonces del resultado análogo para funciones $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$.

1.5.2. Regla de la cadena

Si $f : A \to \mathbf{C}$ es derivable en z y $g : B \to \mathbf{C}$ es derivable en $f(z) \in B$, entonces $g \circ f$ es derivable en z, y se tiene

$$(g \circ f)'(z) = g'\big(f(z)\big) \cdot f'(z). \tag{1.2}$$

En efecto, f y g son derivables en sentido real en z y $f(z)$, resp., siendo $Df(z) = M_{f'(z)}$ y $Dg\big(f(z)\big) = M_{g'(f(z))}$. Por la regla de la cadena para funciones de $\mathbf{R}^n$ en $\mathbf{R}^m$, $g \circ f$ es derivable en sentido real en z, y se tiene:

$$D(g \circ f)(z) = Dg\big(f(z)\big) \cdot Df(z) = M_{g'(f(z))} \cdot M_{f'(z)} = M_{g'(f(z))f'(z)}\,,$$

que implica (1.2) por el Teorema 1.9.

Derivabilidad de las funciones exponenciales y trigonométricas:

$f(z) = \mathrm{e}^z \Longrightarrow u(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y,\ \ v(x, y) = \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y \Longrightarrow u$ y v derivables (de clase C^∞) en $\mathbf{R}^2$. Además,

$$u_x = \mathrm{e}^x \cos y = v_y, \quad u_y = -\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y = -v_x.$$

Por tanto, e^z es derivable (en sentido complejo) en $\mathbf{C}$, siendo

$$(\mathrm{e}^z)' = u_x + \mathrm{i}\, v_x = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\, \mathrm{e}^x \operatorname{sen} y = \mathrm{e}^z, \quad \forall z \in \mathbf{C}.$$

De las propiedades de la derivada compleja (linealidad y regla de la cadena) se sigue que sen y cos son derivables en $\mathbf{C}$, siendo

$$(\operatorname{sen} z)' = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-iz}}{2i} = \cos z, \quad (\cos z)' = \frac{1}{2}(\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-iz}) = -\operatorname{sen} z.$$

De estas fórmulas se deduce la derivabilidad de las restantes funciones trigonométricas en todos los puntos de sus dominios. Por ejemplo,

$$(\tan z)' = \frac{\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z}{\cos^2 z} = \sec^2 z, \quad \forall z \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \ \ (k \in \mathbf{Z}).$$

1.5.3. Teorema de la función inversa

Teorema 1.10. *Sea $f : A \to \mathbf{C}$ analítica en el abierto A (con f' continua en A). Si $a \in A$ y $f'(a) \neq 0$, existen sendos abiertos $U \ni a$ y $V \ni f(a)$ tales que f' no se anula en U y $f : U \subset A \to V$ es biyectiva. Además, $f^{-1} : V \to U$ es analítica en V, siendo*

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(w)\big)}, \quad \forall w \in V.$$

Demostración. f es derivable en sentido real en todo $z \in A$, y su matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} u_x(z) & -v_x(z) \\ v_x(z) & u_x(z) \end{pmatrix}$$

tiene determinante $u_x^2(z) + v_x^2(z) = |f'(z)|^2 \neq 0$. Por el teorema de la función inversa para funciones $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (nótese que la continuidad de f' implica la continuidad de las derivadas parciales de u y v), hay sendos abiertos $U \ni a$ y $V \ni f(a)$ tales que $f : U \subset A \to V$ es biyectiva, Df es invertible en U y $f^{-1} : V \to U$ es diferenciable en sentido real en V, con

$$D(f^{-1})(w) = \big[Df\big(f^{-1}(w)\big)\big]^{-1}, \quad \forall w \in V.$$

Llamando $z = f^{-1}(w)$ se tiene, por el Teorema 1.9:

$$D(f^{-1})(w) = [Df(z)]^{-1} = M_{f'(z)}^{-1} = M_{1/f'(z)}\,.$$

(Nótese que f' no se anula en $U \subset A$, al ser $|f'(z)|^2 = \det Df(z)$.) De nuevo por el Teorema 1.9, de esto se deduce que f^{-1} es derivable en sentido complejo en w, con derivada $1/f'(z)$. *Q.E.D.*

Derivabilidad de log*:*

- Log : $\mathbf{C} - \{0\} \to \{z \in \mathbf{C} : -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi\}$ es discontinua en $\mathbf{R}_- \cup \{0\}$ (por la discontinuidad de Arg).
- Sin embargo, Log es derivable en el abierto $B = \mathbf{C} - (\mathbf{R}_- \cup \{0\})$. En efecto, Log es la inversa *global* de

  $$\exp : A = \{z \in \mathbf{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \to B,$$

  y exp satisface las condiciones del teorema de la función inversa en todo punto de A ($\exp' = \exp$ no se anula y es continua en A).
- Si $z \in A$ y $w = e^z \in B$, hay dos abiertos $U \ni z$ y $V \ni w$ tales que $\exp : U \subset A \to V$ es invertible en U, y

  $$(\exp^{-1})'(w) = \frac{1}{\exp'(z)} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w}.$$

  Al ser $U \subset A$ se tiene $\exp^{-1} = \operatorname{Log}$, y por tanto

  $$(\operatorname{Log} w)' = \frac{1}{w}, \quad \forall w \in \mathbf{C} - (\mathbf{R}_- \cup \{0\}).$$

  Del mismo modo se prueba la derivabilidad de $\log_I$ ($I = [y_0, y_0+2\pi)$ ó $(y_0, y_0+2\pi]$) en el abierto $\mathbf{C} - (\{w : \arg w = y_0 \mod 2\pi\} \cup \{0\})$, siendo $\log_I'(w) = 1/w$.

1.5.4. Transformaciones conformes

Una **curva** en el plano complejo es una aplicación $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$. Se dirá que γ es una curva **diferenciable** si $\operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Im}\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}$ son derivables en $[a,b]$. Si $\gamma = \gamma_1 + \mathrm{i}\,\gamma_2$ es derivable en $[a,b]$, se define su derivada $\gamma'(t)$ mediante $\gamma'(t) = \gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t)$. Geométricamente, $\gamma'(t)$ representa el **vector tangente** a γ en el punto $\gamma(t)$.

Si $f : A \to \mathbf{C}$ es analítica en el abierto $A \subset \mathbf{C}$ y $\gamma : [a,b] \to A$ es una curva diferenciable, entonces $f \circ \gamma$ es una curva diferenciable, y se tiene

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

En efecto, $(f \circ \gamma)'(t) = Df\big(\gamma'(t)\big) \cdot \gamma'(t) = M_{f'(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) = f'\big(\gamma(t)\big) \cdot \gamma'(t)$.

Definición 1.11. Sea $z_0 \in A$, con A abierto y $f : A \to \mathbf{C}$ definida en A. Se dirá que f es **conforme** en z_0 si existen $\theta \in [0, 2\pi)$ y $r > 0$ tales que, para toda curva $\gamma : [-1,1] \to \mathbf{C}$ diferenciable en $t = 0$ con $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma'(0) \neq 0$, la curva $\sigma = f \circ \gamma$ es diferenciable en 0, y se cumple

$$\big|\sigma'(0)\big| = r \cdot \big|\gamma'(0)\big|, \qquad \arg \sigma'(0) = \arg \gamma'(0) + \theta \mod 2\pi.$$

- Si f es conforme en todos los puntos de A, diremos que f es conforme en A.
- Las transformaciones conformes *preservan los ángulos* entre pares de curvas (definidos como los ángulos formados por los vectores tangentes a las curvas en el punto de intersección).

Proposición 1.12. *Si $f : A \to \mathbf{C}$ definida en el abierto A es derivable en $z_0 \in A$, y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0.*

Demostración. Utilizando la misma notación que en la Definición 1.11 se tiene (dado que $f'(z_0) \neq 0$):

$$\begin{aligned} &\sigma'(0) = f'\big(\gamma(0)\big) \cdot \gamma'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0) \\ &\Longrightarrow \big|\sigma'(0)\big| = \big|f'(z_0)\big| \cdot \big|\gamma'(0)\big|, \quad \arg \sigma'(0) = \arg \gamma'(0) + \arg f'(z_0) \mod 2\pi. \end{aligned}$$

Se cumple la condición de la Definición 1.11, siendo

$$r = \big|f'(z_0)\big| > 0, \qquad \theta = \arg_{[0,2\pi)} f'(z_0).$$

Q.E.D.

1.5.5. Funciones armónicas

Definición 1.13. Una función $u : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ es **armónica** en el abierto A si $u \in C^2(A)$, y se cumple

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ en } A.$$

- Si $f : A \to \mathbf{C}$ es analítica en el abierto A entonces $u = \operatorname{Re} f$ y $v = \operatorname{Im} f$ son armónicas en A. (Se dice que u y v son funciones **armónicas conjugadas**).

En efecto, veremos más adelante que f analítica en $A \Longrightarrow u, v \in C^{\infty}(A)$. De las ecuaciones de Cauchy–Riemann se sigue que

$$u_{xx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = v_{yx} = v_{xy} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} = -u_{yy},$$

y análogamente para v. (Nótese que $v_{xy} = v_{yx}$ por ser v de clase $C^2(A)$.)

- Si $f = u + \mathrm{i}\, v : A \to \mathbf{C}$ es analítica en el abierto A y f' no se anula en A, las dos familias de curvas planas $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ son ortogonales.

  En efecto, las dos familias de curvas son *regulares,* ya que de las ecs. de Cauchy–Riemann se sigue que

  $$\nabla u = 0 \iff u_x = u_y = 0 \Longrightarrow v_x = v_y = 0 \Longrightarrow f' = 0,$$

  y análogamente para v. Los vectores normales a las curvas $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ en un punto de intersección (x_0, y_0) son ortogonales, ya que

  $$\begin{aligned} \nabla u(x_0, y_0) \cdot \nabla v(x_0, y_0) &= u_x(x_0, y_0) v_x(x_0, y_0) + u_y(x_0, y_0) v_y(x_0, y_0) \\ &= -u_x(x_0, y_0) u_y(x_0, y_0) + u_y(x_0, y_0) u_x(x_0, y_0) = 0, \end{aligned}$$

  por las ecuaciones de Cauchy–Riemann.
  Nota: Otra forma de probar el resultado anterior es observar que si $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0 \in A$ y $f(z_0) = c_1 + ic_2$, la imagen bajo f de la curva $\{z : u(x, y) = c_1\} \cap A$ está contenida en la recta vertical $\{w : \operatorname{Re} w = c_1\}$. Análogamente, la imagen de la curva $\{v(x, y) = c_2\} \cap A$ es un subconjunto de la recta horizontal $\{w : \operatorname{Im} w = c_2\}$. Como las rectas $\operatorname{Re} w = c_1$ y $\operatorname{Im} w = c_2$ se cortan ortogonalmente en $c_1 + \mathrm{i}\, c_2$, y f es conforme en A (ya que es analítica y su derivada no se anula en dicho conjunto), lo mismo ocurrirá con las curvas $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$.

- Si $u : A \subset \mathbf{R}^2 \equiv \mathbf{C} \to \mathbf{R}$ es armónica en A, $z_0 \in A$ y $U \subset A$ es un entorno de z_0, hay una función $f : U \to \mathbf{C}$ analítica en U tal que $\operatorname{Re} f = u$.

  En efecto, si $z = x + \mathrm{i}\, y \in U$ entonces $v = \operatorname{Im} f$ debería cumplir:

  $$\begin{aligned} v_y &= u_x \Longrightarrow v(x, y) = \int_{y_0}^{y} u_x(x, t)\, dt + h(x); \\ v_x &= \int_{y_0}^{y} u_{xx}(x, t)\, dt + h'(x) = -\int_{y_0}^{y} u_{yy}(x, t)\, dt + h'(x) \\ &= -u_y(x, y) + u_y(x, y_0) + h'(x) = -u_y \iff h'(x) = -u_y(x, y_0) \\ &\Longrightarrow h(x) = -\int_{x_0}^{x} u_y(t, y_0)\, dt + c \\ &\Longrightarrow v = \int_{y_0}^{y} u_x(x, t)\, dt - \int_{x_0}^{x} u_y(t, y_0)\, dt + c. \end{aligned}$$

  Si v está dada por la fórmula anterior $f = u + \mathrm{i}\, v$ es diferenciable (al ser u de clase C^2) y cumple las ecuaciones de Cauchy–Riemann en $U \Longrightarrow f$ es analítica en U, y $\operatorname{Re} f = u$.
  Alternativamente, la forma diferencial $\omega = -u_y\, dx + u_x\, dy$ es cerrada en U (al ser u armónica) $\Longrightarrow \exists v : U \to \mathbf{R}$ (de clase $C^2(U)$) tal que $dv = \omega$. Esto implica que $v_x = -u_y$, $v_y = u_x$, por lo que $f = u + \mathrm{i}\, v$ es analítica en U.

- En una *región*, v está determinada salvo por una constante aditiva. En efecto, si v_1 y v_2 son armónicas conjugadas de la misma función armónica u en la región A, las funciones $f_1 = u + \mathrm{i}\, v_1$ y $f_2 = u + \mathrm{i}\, v_2$ son analíticas en A, por lo que $f = f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$ también es analítica en A. Al ser $\operatorname{Re} f = 0$ en A, las ecuaciones de Cauchy–Riemann implican que las derivadas parciales de $\operatorname{Im} f$ se anulan en A. Por ser A una región, $\operatorname{Im} f = v_1 - v_2$ ha de ser constante en A.

- La existencia de armónica conjugada de una función armónica dada no está asegurada *globalmente*. Por ejemplo, $u : A = \mathbf{R}^2 - \{0\} \to \mathbf{R}$ definida por $u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ no admite una armónica conjugada en A. Localmente, $v = \arg_I z + c$, escogiendo I de forma que $\arg_I$ sea continuo (y por tanto C^∞) en el entorno considerado, ya que $u = \log|z| \Longrightarrow u + \mathrm{i}\, v = \log_I z + c$. Si existiera f analítica en A con $\operatorname{Re} f = u$ entonces f y Log (p. ej.) diferirían en una constante (imaginaria pura) en la región $\mathbf{C} - (\mathbf{R}_- \cup \{0\})$. Pero esto es imposible, ya que si $x < 0$ se tendría (al ser f continua en A y $f = \operatorname{Log} + c$ en $\mathbf{C} - \big(\mathbf{R} - \cup \{0\}\big)$)

$$\begin{aligned} 2\pi i = \lim_{y\to 0+} &\big[\operatorname{Log}(x + \mathrm{i}\, y) - \operatorname{Log}(x - \mathrm{i}\, y)\big] \\ &= \lim_{y\to 0+} \big[f(x + \mathrm{i}\, y) - f(x - \mathrm{i}\, y)\big] = f(x) - f(x) = 0\,. \end{aligned}$$

Capítulo 2

El teorema de Cauchy

2.1. Integración sobre arcos: definición y propiedades elementales

- Si $h_1, h_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ son integrables (por ej., continuas) en $[a,b] \subset \mathbf{R}$ y $h = h_1 + i\, h_2 : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$, definimos

$$\int_a^b h \equiv \int_a^b h(t)\, dt = \int_a^b h_1(t)\, dt + i \int_a^b h_2(t)\, dt \in \mathbf{C}.$$

  Ejemplo: $\displaystyle\int_0^\pi e^{it}\, dt = \int_0^\pi \cos t\, dt + i \int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt = 2\, i.$

- Un **arco continuo** (ó **curva continua**) es una aplicación $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ continua en $[a,b]$ (i.e., $\operatorname{Re}\gamma$ e $\operatorname{Im}\gamma$ son continuas en $[a,b]$).

- El arco continuo γ es C^1 **a trozos** si existe una subdivisión *finita* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ de $[a,b]$ tal que γ' existe y es continua en cada subintervalo $[a_{i-1}, a_i]$ $(1 \le i \le n)$.
  En otras palabras, γ es continua en $[a,b]$ y C^1 en $[a,b] - \{a_0, \ldots, a_n\}$, y existen $\lim_{t\to a+} \gamma'(t)$, $\lim_{t\to b-} \gamma'(t)$ y $\lim_{t\to a_i\pm} \gamma'(t)$ para $i = 1, \ldots, n-1$, aunque los límites por la izquierda y por la derecha en a_i no coincidan.

- Si $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ es un arco de clase C^1 a trozos, $f : A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es continua en el abierto A y $\gamma([a,b]) \subset A$, definimos

$$\int_\gamma f \equiv \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_{i=1}^n \int_{a_{i-1}}^{a_i} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\, dt \in \mathbf{C}.$$

  Nótese que $f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)$ es continua en cada uno de los subintervalos $[a_i, a_{i-1}]$.

- Si $f = u + iv$ y $\gamma(t) = x(t) + i\, y(t)$, entonces (suponiendo por sencillez que γ es

C^1 en $[a,b]$)

$$\begin{aligned}\int_\gamma f &= \int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big) + i\,v\big(x(t),y(t)\big)\big]\,\big[x'(t) + i\,y'(t)\big]\,dt.\\ &= \int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t)\big]\,dt\\ &\quad + i\int_a^b \big[u\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t) + v\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t)\big]\\ &= \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy).\end{aligned}$$

Linealidad. Para todo $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$ se cumple

$$\int_\gamma (\lambda\, f + \mu\, g) = \lambda \int_\gamma f + \mu \int_\gamma g.$$

Cadenas. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ es una curva C^1 a trozos, se define la curva C^1 a trozos $-\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ mediante

$$(-\gamma)(t) = \gamma(a+b-t), \qquad \forall t \in [a,b].$$

Si $\gamma([a,b]) \subset A$ abierto y $f : A \to \mathbf{C}$ es continua en A se cumple

$$\begin{aligned}\int_{-\gamma} f &= \int_a^b f\big(\gamma(a+b-t)\big)\big(-\gamma'(a+b-t)\big)\,dt \overset{s=a+b-t}{=} \int_b^a f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,ds\\ &= -\int_a^b f\big(\gamma(s)\big)\gamma'(s)\,ds = -\int_\gamma f.\end{aligned}$$

Si $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbf{C}$ y $\gamma_2 : [b,c] \to \mathbf{C}$ son curvas C^1 a trozos con $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, definimos la curva C^1 a trozos $\gamma_1 + \gamma_2 : [a,c] \to \mathbf{C}$ mediante

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a,b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b,c]. \end{cases}$$

De forma análoga se define la curva C^1 a trozos $\gamma_1 + \cdots + \gamma_n$. Si $\gamma_1([a,b]), \gamma_2([b,c]) \subset A$ abierto, y $f : A \to \mathbf{C}$ es continua en A, se tiene

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f.$$

Análogamente,

$$\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_n} f = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f.$$

Invariancia bajo reparametrización. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ es C^1 a trozos, una **reparametrización** de γ es una curva $\tilde\gamma : [\tilde a, \tilde b] \to \mathbf{C}$ de la forma $\tilde\gamma = \gamma \circ \phi$, siendo $\phi : [\tilde a, \tilde b] \to \phi([\tilde a, \tilde b]) = [a,b]$ una aplicación de clase C^1 en $[\tilde a, \tilde b]$ con derivada *positiva* en $[\tilde a, \tilde b]$.

Nótese que, al ser $\phi' > 0$ en $[\tilde a, \tilde b]$, ϕ es una función *creciente* en $[\tilde a, \tilde b]$, y por tanto $\phi(\tilde a) = a$, $\phi(\tilde b) = b$. Evidentemente, si el arco γ es C^1 a trozos también lo es $\tilde\gamma$, y

$\gamma([a,b]) = \tilde{\gamma}([\tilde{a},\tilde{b}])$ (es decir, γ y $\tilde{\gamma}$ tienen la misma imagen). Obsérvese, por último, que el teorema de la función inversa implica que $\phi^{-1} : [a,b] \to [\tilde{a},\tilde{b}]$ es de clase C^1 con derivada positiva en $[a,b]$, y por tanto $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \phi^{-1}$ es una reparametrización de $\tilde{\gamma}$.

Ejemplo: $\tilde{\gamma}(s) = e^{i\,s}$ $\big(s \in \big[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\big]\big)$ es una reparametrización de $\gamma(t) = -t + i\sqrt{1-t^2}$ $\big(t \in \big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\big]\big)$. En efecto, $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(-\cos s)$, siendo en este caso $\phi(s) = -\cos s$ de clase C^1 y $\phi'(s) = \operatorname{sen} s > 0$ en $\big[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\big]$.

Proposición 2.1. *Si* $\tilde{\gamma} : [\tilde{a},\tilde{b}] \to \mathbf{C}$ *es una reparametrización de* $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$*,* $\gamma([a,b]) \subset A$*, y* $f : A \to \mathbf{C}$ *es continua en el abierto* A*, se cumple:*

$$\int_{\tilde{\gamma}} f = \int_{\gamma} f.$$

Demostración. Supongamos por sencillez que γ es de clase C^1 en $[a,b]$, y sea $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \phi$ con $\phi : [\tilde{a},\tilde{b}] \to [a,b]$. Entonces se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{\gamma}} f &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\tilde{\gamma}(s)\big)\tilde{\gamma}'(s)\,ds = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} f\big(\gamma(\phi(s))\big)\gamma'\big(\phi(s)\big)\phi'(s)\,ds \\ &\overset{t=\phi(s)}{=} \int_a^b f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\,dt = \int_{\gamma} f.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Integral respecto de la longitud de arco. Si $f : A \to \mathbf{C}$ es continua en al abierto A, $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ es C^1 a trozos y $\gamma([a,b]) \subset A$, se define

$$\int_{\gamma} f(z)\ |dz| = \int_a^b f\big((\gamma(t)\big)\,\big|\gamma'(t)\big|\ dt.$$

Nótese que si $f = u + i\,v$ entonces $\int_{\gamma} f(z)\ |dz| = \int_{\gamma} u\,ds + i\int_{\gamma} v\,ds$. En particular,

$$\int_{\gamma} |dz| = \int_{\gamma} ds = l(\gamma) \equiv \textit{longitud de } \gamma.$$

Propiedades:

I) $\int_{\gamma}\big(\lambda\,f(z) + \mu g(z)\big)\ |dz| = \lambda\int_{\gamma} f(z)\ |dz| + \mu\int_{\gamma}(z)\ |dz|\,, \quad \forall\lambda,\mu \in \mathbf{C}.$

II) $\int_{\gamma_1+\cdots+\gamma_n} f(z)\ |dz| = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)\ |dz|.$

III) $\int_{-\gamma} f(z)\ |dz| = \int_{\gamma} f(z)\ |dz|.$

IV) Si $\tilde{\gamma}$ es una reparametrización de γ, $\displaystyle\int_{\tilde{\gamma}} f(z)\ |dz| = \int_{\gamma} f(z)\ |dz|.$

Desigualdad fundamental. $\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int_{\gamma} |f(z)|\,|dz|.$

En particular, si $\max\limits_{t\in[a,b]} \big|f\big(\gamma(t)\big)\big| = M$ entonces

$$\left|\int_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le M\,l(\gamma).$$

En efecto, la segundad desigualdad es consecuencia de la primera (por las propiedades de la integral de funciones reales de una variable real). Si $\int_\gamma f = 0$, la primera desigualdad se cumple trivialmente. En caso contrario, llamando $\theta = \operatorname{Arg}(\int_\gamma f)$ se tiene:

$$\left|\int_\gamma f\right| = \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta}\int_\gamma f\right] = \int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right] dt \le \left|\int_a^b \operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right] dt\right|$$
$$\le \int_a^b \left|\operatorname{Re}\left[e^{-i\theta} f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right]\right| dt \le \int_a^b \left|f\big(\gamma(t)\big)\gamma'(t)\right| \, dt = \int_\gamma |f(z)|\,|dz|\,.$$

Teorema fundamental del Cálculo. *Sea $F : A \to \mathbf{C}$ analítica en el abierto A (con F' continua en A). Si $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ es C^1 a trozos y $\gamma([a,b]) \subset A$ entonces se cumple:*

$$\int_\gamma F' = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big).$$

En particular, si γ es **cerrada** *(i.e., $\gamma(b) = \gamma(a)$) se tiene*

$$\int_\gamma F' = 0.$$

Demostración.

$$\int_\gamma F' = \int_a^b F'\big(\gamma(t)\big)\,\gamma'(t)\,dt = \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big),$$

por el TFC para funciones $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. *Q.E.D.*

Independencia del camino. *Si $f : A \to \mathbf{C}$ es continua en una región A, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

I) *$\int_\gamma f$ es independiente del camino: $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$ para todo par de curvas C^1 a trozos γ_1 y γ_2 contenidas en A que unen un punto $z_1 \in A$ con otro punto $z_2 \in A$.*

II) *$\int_\Gamma f = 0$ para toda curva* cerrada *C^1 a trozos Γ contenida en A.*

III) *f admite una* **antiderivada** *(ó* **primitiva***) en A: existe $F : A \to \mathbf{C}$ analítica en A y tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in A$.*

Demostración.

i) $\Longleftrightarrow$ ii) Se basa en que si γ_1 y γ_2 son dos curvas C^1 a trozos contenidas en A que unen $z_1 \in A$ con $z_2 \in A$ entonces $\Gamma = \gamma_1 + (-\gamma_2) \equiv \gamma_1 - \gamma_2$ es una curva cerrada, y

$$\int_\Gamma f = \int_{\gamma_1-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f.$$

iii) $\Longrightarrow$i) Por el teorema fundamental del Cálculo (F' es continua, ya que $F' = f$).

i)$\Longrightarrow$iii) Fijemos (arbitrariamente) un punto $z_0 \in A$. Si z es un punto cualquiera de A, por ser A una *región* hay una curva (C^1 a trozos) γ contenida en A que une z_0 con z. Definimos entonces

$$F(z) = \int_\gamma f.$$

Nótese que, por hipótesis, F *no* depende de la curva $\gamma \subset A$ que utilicemos para unir z_0 con z.

Probemos finalmente que F es diferenciable en todo punto $z \in A$, con $F'(z) = f(z)$. Si $\epsilon > 0$, al ser A abierto y f continua en A, existe $\delta > 0$ tal que $|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ si $\zeta \in D(z;\delta) \subset A$. Dado un punto cualquiera $w \in D(z;\delta)$ distinto de z, sea $L \subset D(z;\delta) \subset A$ el segmento que une z con w. Entonces se tiene:

$$F(w) - F(z) = \int_{\gamma+L} f - \int_\gamma f = \int_L f.$$

Al ser $(w-z)f(z) = f(z)\int_L 1 = \int_L f(z)\,d\zeta$ (ya que $1 = \zeta'$) se tiene:

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(w)-F(z)}{w-z} - f(z)\right| &= \frac{|F(w)-F(z)-(w-z)f(z)|}{|w-z|} \\ &= \frac{\left|\int_L f(\zeta)\,d\zeta - \int_L f(z)\,d\zeta\right|}{|w-z|} = \frac{\left|\int_L [f(\zeta)-f(z)]\,d\zeta\right|}{|w-z|} \\ &\le \frac{\epsilon\, l(L)}{|w-z|} = \epsilon.\end{aligned}$$

Q.E.D.

2.2. Teorema de Cauchy–Goursat. Homotopía. Antiderivadas

- Una curva cerrada $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ es **simple** si $a \le s < t \le b$ y $\gamma(s) = \gamma(t) \implies s = a$ y $t = b$.

Teorema de Cauchy (versión original). *Si γ es una curva cerrada simple C^1 a trozos y $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es analítica con derivada* continua *en γ y en el interior de γ, entonces* $\displaystyle\int_\gamma f = 0$.

Demostración. Por el teorema de Stokes (orientando la curva en sentido antihorario, de modo que el interior D de γ quede a la izquierda de γ), si $f = u + i\,v$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\,dz &= \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (u\,dy + v\,dx) \\ &= -\int_D (u_y + v_x)\,dx\,dy + i\int_D (u_x - v_y)\,dx\,dy = 0,\end{aligned}$$

en virtud de las ecuaciones de Cauchy–Riemann. *Q.E.D.*

- Este resultado es insuficiente, ya que no hace falta suponer que f' sea *continua* (se deduce del resto de hipótesis). Además, el resultado es válido para curvas mucho más generales.

Teorema de Cauchy–Goursat para un rectángulo. *Sea R un rectángulo cerrado con los lados paralelos a los ejes, y sea ∂R la frontera de R. Si $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es analítica en R se cumple:*

$$\int_{\partial R} f = 0.$$

Demostración. Orientemos ∂R en sentido antihorario (obviamente, el resultado es independiente de la orientación de ∂R). Si dividimos R en cuatro subrectángulos congruentes $R^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, 4)$ (también orientados en sentido antihorario) entonces

$$\int_{\partial R} f = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R^{(i)}} f.$$

Por tanto, existe $k \in \{1, \ldots, 4\}$ tal que

$$\left| \int_{\partial R^{(k)}} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R} f \right|.$$

Llamemos $R_1 = R^{(k)}$. Repitiendo indefinidamente el proceso anterior, obtenemos una sucesión de rectángulos cerrados encajados $R_0 \equiv R \supset R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \ldots$ tales que

$$\left| \int_{\partial R_n} f \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\partial R_{n-1}} f \right| \Longrightarrow \left| \int_{\partial R_n} f \right| \geq \frac{1}{4^n} \left| \int_{\partial R} f \right|, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Además, si P_i y D_i denotan respectivamente el perímetro y la diagonal del i-ésimo rectángulo y $P \equiv P_0$, $D \equiv D_0$, se tiene:

$$P_i = \frac{P}{2^i}, \quad D_i = \frac{D}{2^i}, \qquad \forall i \in \mathbf{N}.$$

Por el teorema de encaje de Cantor, $\cap_{n \in \mathbf{N}} R_n = \{a\}$, con $a \in R$. Además,

$$z \in R_n \Longrightarrow |z - a| \leq D_n = 2^{-n} D.$$

Si $\epsilon > 0$, tomemos $\delta > 0$ suficientemente pequeño de modo que f sea analítica en $D(a; \delta)$ y además se verifique

$$\left| f(z) - f(a) - (z - a) f'(a) \right| < \epsilon \, |z - a| \,, \quad \forall z \in D(a; \delta), \;\; z \neq a.$$

Escojamos ahora n suficientemente grande para que $D_n = 2^{-n} D < \delta$, de modo que $R_n \subset D(a; \delta)$. Nótese que, por el teorema fundamental del Cálculo,

$$\int_{\partial R_n} dz = \int_{\partial R_n} z \, dz = 0.$$

De esto se sigue que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial R} f \right| &\leq 4^n \left| \int_{\partial R_n} f \right| = 4^n \left| \int_{\partial R_n} \left[f(z) - f(a) - f'(a)(z - a) \right] dz \right| \\ &\leq 4^n \int_{\partial R_n} \epsilon \, |z - a| \, |dz| \leq 4^n \cdot 2^{-n} D\epsilon \cdot P_n = 4^n \cdot 2^{-n} D\epsilon \cdot 2^{-n} P = PD\epsilon. \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, el teorema está demostrado. *Q.E.D.*

Teorema de Cauchy–Goursat generalizado. *Sea a un punto interior a R, y supongamos que $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es analítica en $R - \{a\}$ y $\lim_{z \to a} [(z - a) f(z)] = 0$. Entonces* $\displaystyle\int_{\partial R} f = 0.$

Demostración. Sea $Q \subset R$ un cuadrado con lados paralelos a los ejes coordenados de centro a y lado $l > 0$ suficientemente pequeño de forma que que $|(z-a)f(z)| < \epsilon$ si $z \in Q - \{a\}$. Subdividiendo el rectángulo R adecuadamente obtenemos entonces

$$\left|\int_{\partial R} f\right| = \left|\int_{\partial Q} f\right| \leq \epsilon \int_{\partial Q} \frac{|dz|}{|z-a|} \leq \epsilon \cdot \frac{2}{l} \cdot 4l = 8\epsilon\,,$$

lo que demuestra nuestra afirmación. *Q.E.D.*

2.2.1. Homotopía. Teorema de Cauchy

- Sea $A \subset \mathbf{C}$ una región, y sean γ_1 y γ_2 dos curvas continuas contenidas en A con los mismos extremos $z_1, z_2 \in A$ ($z_1 \neq z_2$), ó dos curvas cerradas continuas contenidas en A. Diremos que γ_1 y γ_2 son **homótopas** en A si γ_1 se puede deformar *continuamente* hasta transformarse en γ_2 *sin salirse de* A.

  En el primer caso, los extremos de las curvas deformadas han de mantenerse iguales a z_1 y z_2, y en el segundo todas las curvas deformadas han de ser cerradas.

  Un punto $z_0 \in A$ es una curva cerrada constante: $\gamma(t) = z_0$, $\forall t \in [a,b]$. Nótese que $\int_{z_0} f = 0$ para toda f.

- Una *región* $A \subset \mathbf{C}$ es **simplemente conexa** si toda curva cerrada continua γ contenida en A es homótopa a un punto en A.

Ejemplo: $\mathbf{C}$ es simplemente conexo. Un disco abierto es una región simplemente conexa. Un disco abierto sin uno de sus puntos no lo es.

Teorema de la deformación. *Sean γ_1 y γ_2 dos curvas C^1 a trozos homótopas en una región A, y sea $f : A \to \mathbf{C}$ analítica en A. Entonces se verifica*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f.$$

Teorema de Cauchy. *Sea γ una curva cerrada C^1 a trozos homótopa a un punto en una región A. Si $f : A \to \mathbf{C}$ es analítica en A se cumple*

$$\int_{\gamma} f = 0. \tag{2.1}$$

Corolario 2.2. *Si $A \subset \mathbf{C}$ es una región simplemente conexa y $f : A \to \mathbf{C}$ es analítica en A entonces*

$$\int_{\gamma} f = 0,$$

para toda curva cerrada γ contenida en A.

Corolario 2.3. *Si $f : A \to \mathbf{C}$ es analítica en una región simplemente conexa A entonces f admite una antiderivada en A.*

Necesitaremos también la siguiente generalización del teorema de Cauchy, que se prueba utilizando el teorema de Cauchy–Goursat generalizado:

Teorema de Cauchy generalizado. *Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ una curva cerrada homótopa a un punto en una región A, y sea $z_0 \in A - \gamma([a,b])$. Si f es analítica en $A - \{z_0\}$ y $\lim_{z \to z_0} [(z-z_0)f(z)] = 0$ entonces $\int_{\gamma} f = 0$.*

2.3. Índice. Fórmula integral de Cauchy y sus consecuencias

2.3.1. Índice

- Si γ es una curva cerrada (C^1 a trozos) y $a \notin \gamma$, definimos el **índice** de a respecto de γ mediante
$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-a}.$$
- Si γ es una circunferencia de centro a y radio $r > 0$ recorrida n veces en sentido antihorario ($\gamma(t) = a + r\,e^{it}$, con $t \in [0, 2n\pi]$) entonces
$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2n\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}\,dt = n.$$
Análogamente, si γ es la circunferencia de centro a y radio $r > 0$ recorrida n veces en sentido horario,
$$n(\gamma, a) = -n.$$
Esto sugiere que $n(\gamma, a)$ es el *número de vueltas que da la curva γ alrededor de a.*

Ejemplo: Si z_0 es un punto exterior a una circunferencia (ó a cualquier curva cerrada simple) γ, entonces $(z - z_0)^{-1}$ es analítica en $A = \mathbf{C} - \{z_0\}$ y γ es homótopa a un punto en $A \Longrightarrow n(\gamma, z_0) = 0$.

Proposición 2.4. *$n(\gamma, z_0)$ es un entero.*

Demostración. Supongamos, por sencillez, que γ es C^1 en $[a, b]$. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$, sea
$$h(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0}\,ds;$$
entonces $n(\gamma, z_0) = h(b)/(2\pi i)$. Por otra parte, h es derivable en $[a, b]$ (el integrando es continuo, ya que el denominador no se anula), y
$$h'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0} \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-h(t)}\,[\gamma(t) - z_0]\right) = 0, \quad \forall t \in [a, b].$$
Por tanto $e^{-h(t)}\big(\gamma(t) - z_0\big)$ es constante en $[a, b]$, de donde se deduce que
$$\gamma(a) - z_0 = e^{-h(b)}(\gamma(b) - z_0) = e^{-h(b)}(\gamma(a) - z_0) \Longrightarrow e^{-h(b)} = 1 \Longrightarrow h(b) = 2n\pi i, \;\; n \in \mathbf{Z}.$$

Q.E.D.

2.3.2. Fórmula integral de Cauchy

Sea $f : A \to \mathbf{C}$ analítica en una región A, sea γ una curva (C^1 a trozos) homótopa a un punto en A, y sea $a \in A$ un punto que no esté sobre γ. Entonces se verifica
$$n(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz.$$

Demostración. La función

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}, & z \neq a \\ f'(a), & z = a \end{cases}$$

es analítica en $A - \{a\}$ y $\lim\limits_{z \to a}[(z - a)g(z)] = \lim\limits_{z \to a}[f(z) - f(a)] = 0$. Por el teorema de Cauchy generalizado,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\gamma g = \int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz - f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z - a} \\ &= \int_\gamma \frac{f(z)}{z - a}\, dz - f(a) \cdot 2\pi i n(\gamma, a). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Si $z \in A$ es cualquier punto de A que no esté sobre γ y $n(\gamma, z) = 1$, podemos reescribir la fórmula anterior como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Derivando esta fórmula *formalmente* respecto de z bajo el signo integral obtenemos

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}}\, dw, \quad k \in \mathbf{N} \tag{2.2}$$

En particular f *es infinitas veces diferenciable en* z. Además, esto se cumple de hecho *para cualquier punto* $z \in A$ (ya que dado cualquier $z \in A$ siempre podemos encontrar una curva γ que esté contenida en A, no pase por z, sea homótopa a un punto en A y cumpla $n(\gamma, z) = 1$ (basta tomar una circunferencia de radio suficientemente pequeño).

2.3.3. Fórmula integral de Cauchy para las derivadas

Sea $f : A \to \mathbf{C}$ una función analítica en una región A. Entonces f es infinitas veces derivable en cualquier punto de A. Además, si $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ es una curva (C^1 a trozos) homótopa a un punto en A y $z_0 \in A - \gamma([a, b])$ se verifica

$$n(\gamma, z_0) \cdot f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw, \quad k \in \mathbf{N}. \tag{2.3}$$

Demostración. Consideremos la *integral de tipo Cauchy*

$$G(z) = \int_\gamma \frac{g(w)}{w - z}\, dw,$$

donde g es una función continua sobre γ y $z \notin \gamma([a, b])$. Se demuestra entonces que G es infinitas veces derivable en todo punto $z \in A - \gamma([a, b])$, siendo

$$G^{(k)}(z) = k! \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z)^{k+1}}\, dw.$$

La demostración es por inducción, aunque nosotros sólo probaremos en detalle el caso $k = 1$. Para ello, sea $z_0 \in A - \gamma([a, b])$,

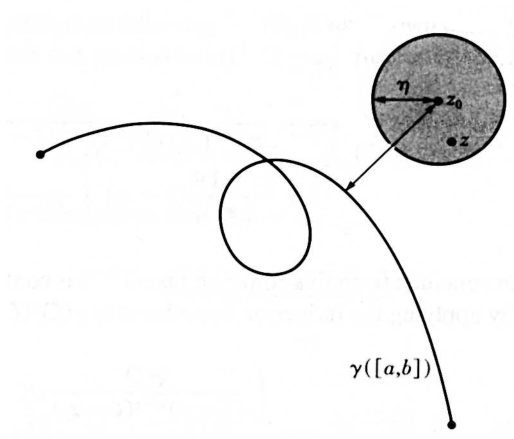

Figura 2.1: integral de tipo Cauchy

$$2\eta = \min_{t\in[a,b]} |\gamma(t) - z_0| > 0, \quad M = \max_{t\in[a,b]} \left|g\big(\gamma(t)\big)\right|.$$

(Nótese que $\eta > 0$ y $M < \infty$ por la continuidad de γ y $g \circ \gamma$ en $[a, b]$.) Si $z \in D(z_0; \eta)$ con $z \neq z_0$ se tiene

$$\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \left[\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z_0}\right] g(w)\, dw.$$

Pero

$$\begin{aligned}\frac{1}{z - z_0} \left[\frac{1}{w - z} - \frac{1}{w - z_0}\right] &= \frac{1}{(w - z)(w - z_0)} \\ &= \frac{1}{(w - z_0)^2} \frac{w - z_0}{w - z} = \frac{1}{(w - z_0)^2} \left(1 + \frac{z - z_0}{w - z}\right).\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}\left|\frac{G(z) - G(z_0)}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z_0)^2}\, dw\right| &= |z - z_0| \left|\int_\gamma \frac{g(w)}{(w - z_0)^2 (w - z)}\, dw\right| \\ &\leq |z - z_0| \cdot \frac{M\, l(\gamma)}{4\eta^2 \cdot \eta} \xrightarrow[z\to z_0]{} 0.\end{aligned}$$

Como $n(\gamma, z)$ es una integral de tipo Cauchy ($g = 1/2\pi i$), es continua en cualquier entorno D de z_0 que no corte a γ (por ejemplo, en $D(z_0; \eta)$), y como es un número *entero* ha de ser *constante* en dicho entorno. Si

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw$$

y $z \in D$ se tiene

$$F(z) = n(\gamma, z) f(z) = n(\gamma, z_0) f(z)$$

y por tanto (ya que F también es de tipo Cauchy)

$$\begin{aligned}n(\gamma, z) f^{(k)}(z) &= n(\gamma, z_0) f^{(k)}(z) = F^{(k)}(z) \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}}\, dw.\end{aligned}$$

Q.E.D.

Nota: A partir del teorema anterior se prueba fácilmente que si f es analítica en un conjunto cualquiera C entonces f es infinitas veces derivable en todo punto de C.

2.3.4. Desigualdades de Cauchy

Sea f analítica en una región A, sea $a \in A$, y supongamos que $\overline{D}(a;R) \equiv \{z \in \mathbf{C} : |z-a| \leq R\} \subset A$. Si $M = \max\limits_{|z-a|=R} |f(z)|$ entonces

$$\left|f^k(a)\right| \leq \frac{k!}{R^k} M, \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Demostración. Si γ es el círculo de centro a y radio R orientado positivamente entonces γ es homotópico a un punto en A (ya que lo es en el disco cerrado o, con más rigor, en un disco abierto ligeramente más grande contenido en A) y $n(\gamma, a) = 1$. La fórmula integral de Cauchy para la k-ésima derivada proporciona entonces

$$\begin{aligned} \left|f^{(k)}(a)\right| &= \frac{k!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}}\, dz \right| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z-a|^{k+1}}\, |dz| \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{M}{R^{k+1}}\, 2\pi R = \frac{k!}{R^k} M. \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.3.5. Teorema de Liouville

Si $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es **entera** *(es decir, analítica en todo $\mathbf{C}$) y $|f|$ está acotada en $\mathbf{C}$, entonces f es constante.*

Demostración. La hipótesis implica que existe $M > 0$ tal que $|f(z)| < M$ para todo $z \in \mathbf{C}$. Si $z \in \mathbf{C}$, de la desigualdad de Cauchy para la primera derivada se deduce que

$$\left|f'(z)\right| < \frac{M}{R}, \quad \forall R > 0$$

(ya que, al ser $A = \mathbf{C}$, se puede aplicar la fórmula de Cauchy para las derivadas para cualquier $R > 0$). De esto se sigue obviamente que $|f'(z)| = 0$ para todo $z \in \mathbf{C}$. Al ser $\mathbf{C}$ conexo, f ha de ser constante en $\mathbf{C}$. *Q.E.D.*

2.3.6. Teorema de Morera

Si $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es continua en una región A y $\int_\gamma f = 0$ para toda curva cerrada (C^1 a trozos) γ contenida en A, entonces f es analítica en A.

Demostración. El teorema acerca de la independencia del camino implica que existe $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica en A tal que $f = F'$ en A. Como F es analítica en A, es infinitamente derivable en A, y por tanto $f' = F''$ existe en todo punto de A. *Q.E.D.*

2.3.7. Teorema fundamental del Álgebra

Un polinomio de grado $n \geq 1$ tiene al menos una raíz.

Demostración. Sea $p(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, con $a_n \neq 0$ y $n \geq 1$. Si p no tuviera ninguna raíz, la función $f = 1/p$ sería entera. Probaremos que esto es imposible demostrando que en tal caso f sería también acotada en $\mathbf{C}$ y no constante, en contradicción con el teorema de Liouville.

Para probar que f está acotada, nótese que si $z \neq 0$

$$|p(z)| \geq |z|^n \left(|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right).$$

Como $|a_i| \,/\, |z|^{n-i} \xrightarrow[|z|\to\infty]{} 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$, existe $K > 1$ tal que

$$|z| > K \Longrightarrow \frac{|a_i|}{|z|^{n-i}} < \frac{|a_n|}{2n}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Por tanto

$$|z| > K \Longrightarrow |p(z)| > \frac{|a_n|}{2}\, |z|^n > \frac{|a_n|}{2} > 0.$$

Por otra parte, al ser el disco cerrado de centro 0 y radio K compacto, existe $M > 0$ tal que $|p(z)| > M > 0$ si $|z| \leq K$ (nótese que $M > 0$, al ser, por hipótesis, $p(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbf{C}$). Por tanto, hemos probado que

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} < \text{máx} \left(\frac{2}{|a_n|}, \frac{1}{M} \right), \qquad \forall z \in \mathbf{C}.$$

Esto contradice el teorema de Liouville, al ser f entera y no constante (p no es constante, ya que $a_n \neq 0$ y $n \geq 1$). *Q.E.D.*

2.4. Principio del módulo máximo. Propiedad del valor medio

2.4.1. Propiedad del valor medio

Si $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ es analítica en el disco cerrado $\overline{D}(a; r)$ se verifica

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\big(a + r\, e^{i\theta}\big)\, d\theta.$$

Demostración. Antes de probar este resultado, nótese que la fórmula anterior expresa que el valor de f en a es la media de los valores de f en el círculo de centro a y radio r.

La demostración es una consecuencia inmediata de la fórmula integral de Cauchy. En efecto, por hipótesis f es analítica en un abierto $A \supset \overline{D}(a; r)$, que puede tomarse como una región (de hecho, como un disco abierto de radio ligeramente mayor que r: cf. Marsden–Hoffman, prob. 1.4.27). La circunferencia γ de centro a y radio r (orientada positivamente) es homótopa a un punto en A, ya que lo es obviamente en el disco cerrado (con más rigor, en un disco abierto ligeramente más grande contenido en A). Aplicando la fórmula integral de Cauchy se obtiene:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz \overset{z=a+re^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(a+r\,e^{i\theta})}{r\,e^{i\theta}}\,ire^{i\theta}\,d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\big(a+r\,e^{i\theta}\big)\,d\theta.$$

Q.E.D.

2.4.2. Principio del módulo máximo

Sea $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ analítica en un abierto A, y supongamos que $|f|$ tiene un máximo relativo en $a \in A$. Entonces f es constante en un entorno de a.

Demostración. Por hipótesis, existe $R > 0$ tal que

$$|f(z)| \le |f(a)|, \qquad \forall z \in D(a;R) \equiv D \subset A.$$

Vamos a probar, en primer lugar, que $|f|$ es constante en D. Para ello, supongamos que existiera $z_0 = a + re^{i\alpha} \in D$ tal que $|f(z_0)| < |f(a)|$. Por la continuidad de f en $D \subset A$, existen $\epsilon > 0$ y $0 < \delta \le \pi$ tales que

$$\left|f(a+re^{i\theta})\right| < |f(a)| - \epsilon, \qquad \alpha - \delta \le \theta \le \alpha + \delta.$$

En efecto, al ser $|f(a)| - |f(z_0)| > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(z_0)| < |f(a)| - 2\epsilon$, y por continuidad de $g(\theta) = f(a + re^{i\theta})$ en $\theta = \alpha$ existe $0 < \delta \le \pi$ tal que $\left|f(a+re^{i\theta}) - f(a+re^{i\alpha})\right| < \epsilon$ si $\alpha - \delta \le \theta \le \alpha + \delta$. Para estos valores de θ se cumple $\left|f(a+re^{i\theta})\right| \le \left|f(a+re^{i\alpha})\right| + \epsilon < |f(a)| - 2\epsilon + \epsilon = |f(a)| - \epsilon$.

Aplicando la propiedad del valor medio obtenemos:

$$\begin{aligned}
|f(a)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha-\pi}^{\alpha+\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha-\pi}^{\alpha-\delta} f(a+re^{i\theta})\,d\theta\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha-\delta}^{\alpha+\delta} f(a+re^{i\theta})\,d\theta\right| + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha+\delta}^{\alpha+\pi} f(a+re^{i\theta})\,d\theta\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\big[|f(a)|\,(\pi-\delta) + (|f(a)|-\epsilon)(2\delta) + |f(a)|\,(\pi-\delta)\big] \\
&= |f(a)| - \frac{\delta\epsilon}{\pi} < |f(a)|,
\end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Esto demuestra que $|f|$ es constante en D, lo cual implica (Problema 19) que f es también constante en D. *Q.E.D.*

Corolario 2.5. *Si $f : A \to \mathbf{C}$ es analítica en una* región *A y $|f|$ alcanza un máximo* absoluto *en A, entonces f es constante en A.*

Demostración. Supongamos que $|f|$ alcanza un máximo absoluto en $z_0 \in A$, y sea $B = \{z \in A : f(z) = f(z_0)\}$. Nótese que, al ser f continua en A, B es cerrado respecto de A. Si $z \in B$, como $|f(z)| = |f(z_0)| = \max_{z\in A}|f(z)|$, el principio del módulo máximo local implica que f es constante en un entorno U de z. Luego B es también abierto, ya que contiene un entorno de cualquiera de sus puntos. Como B es simultáneamente abierto y cerrado respecto de A, es no vacío ($z_0 \in B$) y A es conexo, se tiene que $B = A$, es decir $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in A$. *Q.E.D.*

2.4.3. Principio del módulo máximo global

Sea $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ *analítica en una región* acotada A *y continua en la frontera* ∂A *de* A. *Si* $M = \max_{z \in \partial A} |f(z)|$, *entonces se cumple:*

I) $|f(z)| \leq M$ *para todo* $z \in A$

II) *Si* $|f(a)| = M$ *para algún* $a \in A$ *entonces* f *es constante en* A.

Demostración. En primer lugar $M \in \mathbf{R}$ existe, al ser ∂A cerrado y acotado (por ser A acotado), y $|f|$ continua en ∂A. En segundo lugar, la segunda afirmación es consecuencia de la primera y del corolario del teorema del módulo máximo local. Para probar la primera afirmación, nótese que la función $|f|$ también es continua en el compacto $\bar{A} = A \cup \partial A$, de forma que alcanza un máximo en dicho conjunto. Si dicho máximo se alcanza en ∂A, entonces la primera afirmación se cumple por definición de máximo. Si, por el contrario, el máximo de $|f|$ en $\bar{A}$ se alcanza en un punto $z_0 \in A$, el corolario del teorema del módulo máximo local implica que $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in A$. Por continuidad, $f(z) = f(z_0)$ para todo $z \in \bar{A}$, lo cual implica trivialmente la primera afirmación (f es constante en $\bar{A}$). *Q.E.D.*

Capítulo 3

Representación de funciones analíticas mediante series

3.1. Convergencia de sucesiones y series de funciones

3.1.1. Sucesiones y series de números complejos

- Una **sucesión** de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge** a $z \in \mathbf{C}$ ($\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$) si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geq N \Longrightarrow |z_n - z| < \epsilon.$$

- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$, si existe, es único.

- $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \equiv x + i\,y \iff \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Re}(z_n) = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Im}(z_n) = y$.

- **Criterio de Cauchy:**

$$\exists \lim_{n\to\infty} z_n \iff \forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{t.q.} \quad n, m \geq N \Longrightarrow |z_n - z_m| < \epsilon.$$

  Demostración.

  $\Longrightarrow$) $|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z_m - z|$

  $\Longleftarrow$) $z_n = x_n + i\,y_n \Longrightarrow |x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|\,,\ |y_n - y_m| \leq |z_n - z_m| \Longrightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes (sucesiones reales de Cacuhy) $\Longrightarrow \{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente. *Q.E.D.*

- La serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ **converge** a $s \in \mathbf{C}$ $\left(\Leftrightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = s\right)$ si la sucesión de **sumas parciales** $\left\{\sum_{k=1}^{n} z_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a s, es decir

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = s \iff \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = s.$$

- $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ convergente $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} z_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} z_k\right) = 0$

- Se dice que $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ es convergente.

Proposición 3.1. *Si* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *es absolutamente convergente entonces es convergente.*

Demostración. Es consecuencia del criterio de Cauchy, ya que si (por ej.) $m > n$ se tiene

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k - \sum_{k=1}^{m} z_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} z_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} |z_k| - \sum_{k=1}^{m} |z_k|\right|.$$

Q.E.D.

3.1.2. Sucesiones y series de funciones. Convergencia uniforme

Una **sucesión de funciones** $f_n : A \to \mathbf{C}$ definidas en un conjunto $A \subset \mathbf{C}$ ($n \in \mathbf{N}$) **converge puntualmente** a una función f en A si para todo $z \in A$ existe $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$. Análogamente, la **serie de funciones** $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge puntualmente a g en A si existe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(z) = g(z)$ para todo $z \in A$.

Definición 3.2. La sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definidas en A **converge uniformemente a** f **en** A si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geq N \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon, \ \textbf{para todo} \ z \in A.$$

Análogamente, $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a g en A si la sucesión de funciones $\left\{\sum_{k=1}^{n} g_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a g en A, es decir si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{t.q.} \quad n \geq N \Longrightarrow \left|\sum_{k=1}^{n} g_k(z) - g(z)\right| < \epsilon, \ \textbf{para todo} \ z \in A.$$

• Obviamente, si una sucesión ó serie de funciones $f_n : A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ converge uniformemente a f en A entonces converge puntualmente en A a la misma función. Sin embargo, *la convergencia puntual de una sucesión ó serie de funciones no implica, en general, su convergencia uniforme.*

• **Criterio de Cauchy:** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente en A si y sólo si

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbf{N} \quad \text{t.q.} \quad n, m \geq N \Longrightarrow |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon, \ \textbf{para todo} \ z \in A.$$

Análogamente para series de funciones.

Demostración. En primer lugar, es claro que la convergencia uniforme de f_n a f en A implica el criterio de Cauchy. Para demostrar el recíproco nótese que, por el criterio de Cauchy para sucesiones numéricas, la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función f en A. Haciendo tender m a infinito en la condición de Cauchy uniforme se prueba que si $n \geq N$ entonces $|f_n(z) - f(z)| \leq \epsilon$ para todo $z \in A$. *Q.E.D.*

Criterio M de Weierstrass. *Sea $g_k : A \subset \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ $(k \in \mathbf{N})$ una sucesión de funciones, y supongamos que $|g_k(z)| \leq M_k$ para todo $z \in A$ y para todo $k \in \mathbf{N}$. Si la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge absoluta y uniformemente en A.*

Demostración. Es consecuencia del criterio de Cauchy para la convergencia uniforme, ya que si $m > n$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} g_k(z)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |g_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k.$$

Q.E.D.

- Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge *uniformemente* a f en A y $f_n : A \to \mathbf{C}$ es *continua* en A para todo $n \in \mathbf{N}$, entonces f es *continua* en A. Análogamente, si g_n es continua en A para todo $n \in \mathbf{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente a g en A entonces g es continua en A.

Lema 3.3. *Sea f_n continua en A para todo $n \in \mathbf{N}$. Si $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en A y γ es una curva C^1 a trozos contenida en A entonces*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = \int_\gamma f \equiv \int_\gamma \lim_{n\to\infty} f_n.$$

En particular, si g_k es continua en A para todo $k \in \mathbf{N}$ y $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge uniformemente en A entonces

$$\int_\gamma \left(\sum_{k=1}^{\infty} g_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_\gamma g_k.$$

Demostración. En primer lugar, nótese que f es continua, al ser uniforme la convergencia de f_n a f. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ para todo $z \in A$ si $n \geq N$. Entonces se tiene:

$$\left|\int_\gamma f_n - \int_\gamma f\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)\right| \leq \int_\gamma |f_n(z) - f(z)|\,|dz| \leq \epsilon\, l(\gamma)\,, \qquad \forall n \geq N\,.$$

Q.E.D.

Teorema de la convergencia analítica. *Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto A tales que $f_n \to f$ uniformemente en cada disco cerrado contenido en A. Entonces f es analítica en A, y $f_n' \to f'$ uniformemente en cada disco cerrado contenido en A.*

Demostración. En primer lugar, por ser uniforme la convergencia de f_n a f en discos cerrados contenidos en A, f es continua en cada disco cerrado contenido en A, y por tanto es continua en A. Sea $\overline{D}(a;r) \subset A$. Si γ es una curva cerrada C^1 a trozos contenida en $D(a;r)$ entonces f es continua en $D(a;r)$ y

$$\int_\gamma f = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n = 0,$$

por el Lema 3.3 y el teorema de Cauchy (f_n es analítica y γ es homótopa a un punto en $D(a;r) \subset A$). Por el teorema de Morera, f es analítica en $D(a;r)$, y por tanto también en A.

Para probar que $f'_n \to f'$ uniformemente en $\overline{D}(a;r)$, nótese que existe $R > r$ tal que $\overline{D}(a;R) \subset A$. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $|f_n(w) - f(w)| < \epsilon$ para todo $w \in \overline{D}(a;R)$ y $n \geq N$. Si $z \in \overline{D}(a;r)$ y γ es la circunferencia de centro a y radio R (orientada positivamente) se tiene entonces, por la fórmula integral de Cauchy para la primera derivada:

$$\left|f'_n(z) - f'(z)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w-z)^2}\,dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{\epsilon}{(R-r)^2}\,2\pi R = \frac{\epsilon R}{(R-r)^2}.$$

Q.E.D.

Corolario 3.4. *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ una serie de funciones analíticas en un abierto A uniformemente convergente a g en cada disco cerrado contenido en A. Entonces g es analítica en A, y $\sum_{k=1}^{\infty} g'_k$ converge uniformemente a g' en cada disco cerrado contenido en A.*

En particular, nótese que

$$\frac{d}{dz}\sum_{k=1}^{\infty} g_k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{dg_k}{dz} \quad \text{en } A\,;$$

en otras palabras, *la serie se puede derivar término a término en A.*

3.2. Convergencia de series de potencias. Teoremas de Taylor y Laurent.

3.2.1. Series de potencias

Una **serie de potencias** centrada en $z_0 \in \mathbf{C}$ es una serie del tipo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \qquad a_k \in \mathbf{C}\;\; (k = 0, 1, \dots). \tag{3.1}$$

Teorema de Abel. *Para toda serie de potencias* (3.1) *hay un R tal que $0 \leq R \leq \infty$, llamado el* **radio de convergencia** *de la serie, que cumple:*

i) *La serie converge* absolutamente *para $|z - z_0| < R$. Además, la convergencia es* uniforme *en todo disco cerrado $\overline{D}(z_0;r)$ de radio $r < R$.*

ii) *La serie diverge si $|z - z_0| > R$.*

Si $R > 0$, la suma de la serie es una función analítica *en el* ***disco de convergencia*** *$D(z_0;R)$, cuya derivada se obtiene derivando término a término la serie dada.*

Demostración. Claramente, de i) y ii) se sigue que R, si existe, es único. Probaremos que

$$R = \sup\left\{r \geq 0 : \{|a_n|\, r^n\}_{n=0}^{\infty} \text{ acotada}\right\};$$

en particular, $R = \infty$ si $\{|a_n|\, r^n\}_{n=0}^{\infty}$ está acotada para todo $r \geq 0$. Con esta definición, la parte ii) es trivial: si $|z - z_0| > R$, la sucesión $\{|a_n|\, |z-z_0|^n\}_{n=0}^{\infty} = \{|a_n(z-z_0)^n|\}_{n=0}^{\infty}$ no está acotada, y por tanto el término general de la serie no tiende a cero cuando $n \to \infty$.

Para probar i), nótese en primer lugar que si $R = 0$ la serie diverge para todo $z \neq z_0$, y no hay nada que probar. Sea, por tanto, $R > 0$. Por definición de R, si $0 < r < R$ existen $r < \rho < R$ y $M > 0$ tal que $|a_n| \rho^n < M$ para todo n. Si $|z - z_0| \leq r$ se tiene:

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| \rho^n \left(\frac{|z - z_0|}{\rho} \right)^n \leq M \left(\frac{r}{\rho} \right)^n .$$

Por el criterio M de Weierstrass, la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(z_0; r)$; en particular, converge absolutamente en $D(z_0; R)$. La última parte se sigue del criterio de la convergencia analítica (ya que de i) se deduce que la serie converge uniformemente en cada disco cerrado $\overline{D}(a; r) \subset D(z_0; R)$). *Q.E.D.*

- *El radio de convergencia de la derivada de una serie de potencias es igual al radio de convergencia de la serie.*

En efecto, por el teorema de la convergencia analítica, basta ver que la serie $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ diverge si $|z - z_0| > R$. Y, en efecto

$$k |a_k| |z - z_0|^{k-1} = |z - z_0|^{-1} \cdot k |a_k| |z - z_0|^k \geq |z - z_0|^{-1} \cdot |a_k| |z - z_0|^k .$$

Por definición de R, el último término *no* está acotado cuando $|z - z_0| > R$. Luego el término general de la serie $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ no tiende a cero si $|z - z_0| > R$, por lo que dicha serie diverge si $|z - z_0| > R$.

Teorema 3.5. *Sea $0 < R \leq \infty$ el radio de convergencia de la serie $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$. Entonces f es infinitas veces derivable y*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \ \forall z \in D(z_0; R),$$

siendo el radio de convergencia de todas estas series de potencias igual a R. Además, los coeficientes a_n vienen dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad \forall n = 0, 1, 2, \dots .$$

Corolario 3.6 (unicidad de las series de potencias). *Si existe $r > 0$ tal que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k, \qquad \forall z \in D(z_0, r),$$

entonces $a_k = b_k$ para todo $k = 0, 1, 2, \dots$.

Demostración. $a_k = b_k = f^{(k)}(z_0)/k!$, siendo $f(z)$ la suma de cualquiera de las dos series. *Q.E.D.*

- *Si existe (o vale $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, entonces $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.*

Análogamente, si existe (o vale $+\infty$) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ entonces $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

Probemos, por ejemplo, la primera fórmula. Por el criterio del cociente, si $z \neq z_0$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, |z - z_0|^k$ converge si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\, |z - z_0|^{n+1}}{|a_n|\, |z - z_0|^n} = |z - z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

y diverge si

$$|z - z_0| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1.$$

Análogamente (aplicando el criterio de la raíz) se prueba la segunda.

- *El radio de convergencia R de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ se puede calcular mediante la* fórmula de Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(*Nota:* Si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbf{N}$, $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_k : k \geq n\}$. El límite superior siempre existe, vale infinito si y sólo si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente, y coincide con el límite ordinario cuando dicho límite existe.)

3.2.2. Teorema de Taylor

Sea f analítica en un abierto A, sea $z_0 \in A$, y supongamos que $D(z_0; r) \subset A$. Entonces f admite el desarrollo en **serie de Taylor**

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k, \qquad \forall z \in D(z_0; r). \tag{3.2}$$

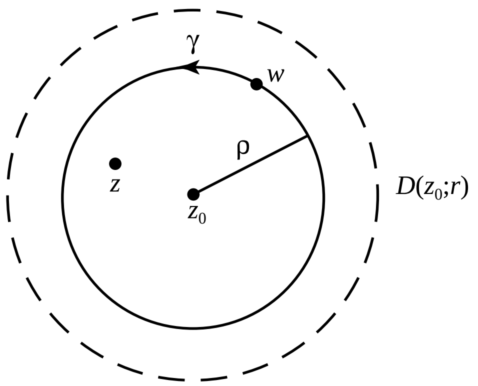

Figura 3.1: teorema de Taylor

Demostración. Sea $0 < \rho < r$, y fijemos $z \in D(z_0; \rho)$. Si γ es la circunferencia de centro z_0 y radio ρ (orientada positivamente) se tiene, por la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Por otra parte,

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w-z_0+z_0-z} = \frac{1}{w-z_0} \frac{1}{1-\dfrac{z-z_0}{w-z_0}} = \frac{1}{w-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^k ,$$

ya que $w \in \gamma \Longrightarrow |z-z_0| < \rho = |w-z_0|$. Como $f(w)$ es analítica en γ, está acotada en γ, por lo que

$$\left| \frac{f(w)}{w-z_0} \right| \left| \frac{z-z_0}{w-z_0} \right|^k < \frac{M}{\rho} \left| \frac{z-z_0}{\rho} \right|^k , \qquad \forall w \in \gamma .$$

La serie *numérica* (es decir, independiente de w) $\frac{M}{\rho} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{\rho}\right|^k$ es convergente (se trata de una serie geométrica de razón menor que 1). Por el criterio M de Weierstrass, la serie

$$\frac{f(w)}{w-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{w-z_0} \right)^k$$

convergente uniforme y absolutamente en γ. Integrando término a término obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} (z-z_0)^k \, dw \\ = \sum_{k=0}^{\infty} (z-z_0)^k \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-z_0)^{k+1}} \, dw = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k, \end{aligned}$$

por la fórmula integral de Cauchy para las derivadas. Esto prueba el desarrollo (3.2) para todo $z \in D(z_0;\rho)$ con $0 < \rho < r$ arbitrario, es decir para todo $z \in D(z_0;r)$. *Q.E.D.*

Corolario 3.7. *El radio de convergencia de la serie de Taylor* (3.2) *de una función f analítica en A es mayor o igual que la distancia de z_0 a la frontera de A.*

Nota. El radio de convergencia de la serie de Taylor de f (3.2) puede ser estrictamente *mayor* que la distancia d de z_0 a la frontera de A. Por ejemplo, si $f(z) = \operatorname{Log} z$ y $z_0 = -1+i$ (ejercicio). Sin embargo, es fácil probar que si f no está acotada en el disco abierto de centro z_0 y radio d entonces el radio de convergencia de la serie de Taylor (3.2) es exactamente igual a d.

Definición 3.8. Una función f analítica en un entorno de $a \in \mathbf{C}$ tiene un **cero de orden** k en a si

$$f(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Por el teorema de Taylor, si f tiene un cero de orden k en a entonces existe $r > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |z-a| < r \Longrightarrow f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \\ = (z-a)^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+k)}(a)}{(n+k)!} (z-a)^n \equiv (z-a)^k F(z), \end{aligned}$$

con F analítica en $D(a;r)$ (es una serie de potencias convergente) y $F(a) \neq 0$.

3.2.3. Teorema de Laurent

Una serie de la forma

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k}$$

es una serie de potencias en la variable $w = (z-z_0)^{-1}$. Por tanto, existe $0 \le R \le \infty$ tal que la serie converge absolutamente a una función analítica si $|z-z_0| > R$ y diverge si $|z-z_0| < R$, siendo la convergencia de la serie absoluta y uniforme en el complemento de cualquier disco $D(z_0; r)$ con $r > R$. Consideremos ahora la expresión

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k. \tag{3.3}$$

La primera serie convergerá absolutamente en un disco $D(z_0; R_2)$, y la segunda para $|z-z_0| > R_1$. Por tanto, f estará definida y será analítica en la **corona circular**

$$C(z_0; R_1, R_2) = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\},$$

(**corona de convergencia**), siempre y cuando sea $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$. Además (por los resultados sobre series de potencias) la convergencia de ambas series es absoluta y uniforme en toda subcorona cerrada contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$. Una serie del tipo (3.3) se denomina **serie de Laurent** centrada en z_0.

Teorema de Laurent. *Sea f una función analítica en la corona $C(z_0; R_1, R_2)$ (con $0 \le R_1 < R_2 \le \infty$). Si $R_1 < r < R_2$, sea γ_r la circunferencia de centro z_0 y radio r orientada positivamente, y definamos*

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}\, dz, \qquad \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{3.4}$$

*Entonces f admite el **desarrollo en serie de Laurent***

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k, \tag{3.5}$$

donde la serie del miembro derecho converge absoluta y uniformemente en cada subcorona cerrada contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$.

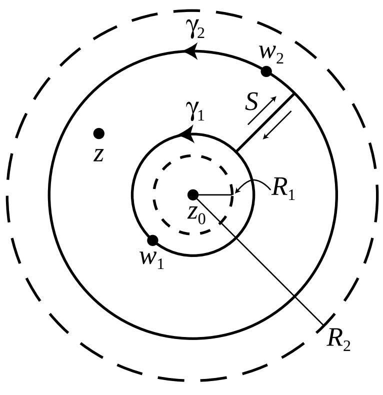

Figura 3.2: teorema de Laurent

Demostración. Sea $A = C(z_0; r_1, r_2)$ con $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, de modo que la corona cerrada $\bar{A}$ está contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$. Llamemos $\gamma_{r_1} \equiv \gamma_1$, $\gamma_{r_2} \equiv \gamma_2$. La curva cerrada $S + \gamma_2 - \gamma_1 - S$ es homótopa a un punto en $C(z_0; R_1, R_2)$ (véase la fig. 3.2). Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S+\gamma_2-\gamma_1-S} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\, dw \equiv f_1(z) + f_2(z), \quad \forall z \in A. \end{aligned}$$

La demostración del teorema de Laurent consiste, básicamente, en desarrollar f_1 y f_2 como series de potencias en $z - z_0$ y $(z - z_0)^{-1}$, respectivamente. Para f_1, repitiendo el razonamiento que se utilizó para probar el teorema de Taylor se obtiene

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(w) \frac{1}{w - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^k dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}}\, dw, \end{aligned}$$

donde el último paso está justificado por la convergencia uniforme de la serie para $w \in \gamma_2$ ($w \in \gamma_2 \Longrightarrow |z - z_0| / |w - z_0| = |z - z_0| / r_2 < 1$). En cuanto a f_2, basta observar que si $r_1 < |z - z_0|$ se tiene

$$\frac{1}{w - z} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{w - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}.$$

De nuevo, la convergencia es uniforme para $w \in \gamma_1$ ($w \in \gamma_1 \Longrightarrow |w - z_0| / |z - z_0| = r_1 / |z - z_0| < 1$), por lo que

$$\begin{aligned} f_2(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}\, dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^{-k-1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(w)(w - z_0)^k\, dw \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (z - z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\, dw. \end{aligned}$$

Por el teorema de la deformación, $\int_{\gamma_r} f(w)(w - z_0)^{-n-1}\, dw$ es independendiente de r si $R_1 < r < R_2$, lo que prueba (3.4)–(3.5). La corona de convergencia de la serie de Laurent (3.4)–(3.5) es por lo menos $C(z_0; R_1, R_2)$; por tanto, de las propiedades de las series de Laurent se deduce que la convergencia de dicha serie es absoluta y uniforme en toda subcorona cerrada centrada en z_0 y contenida en $C(z_0; R_1, R_2)$. *Q.E.D.*

3.2.4. Clasificación de singularidades aisladas

Definición 3.9. Una función $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ tiene una **singularidad aislada** en $z_0 \in \mathbf{C}$ si f es analítica en algún entorno reducido $C(z_0; 0, r)$ ($r > 0$) de z_0.

Por el teorema de Laurent, si f tiene una singularidad aislada en z_0 existe $r > 0$ tal que f admite un desarrollo en serie de Laurent (3.3) en $C(z_0; 0, r)$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \qquad \text{si } 0 < |z - z_0| < r. \tag{3.6}$$

i) Si $b_k = 0$ para todo $k \in \mathbf{N}$, se dice que z_0 es una **singularidad evitable** de f.

ii) Si $b_p \neq 0$ y $b_k = 0$ para todo $k > p$, el punto z_0 es un **polo de orden** p para f.

iii) Finalmente, si existen infinitos coeficientes $b_k \neq 0$ se dice que f tiene una **singularidad esencial** en z_0.

Definición 3.10. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-k}$ se denomina **parte principal** del desarrollo de Laurent de f en z_0. El **residuo** de f en z_0 es

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = b_1.$$

Ejemplo: Las funciones $f_1(z) = \operatorname{sen} z/z$, $f_2(z) = 1/\operatorname{sen}^2 z$ y $f_3(z) = e^{1/z}$ tienen respectivamente una singularidad evitable, un polo de orden 2 y una singularidad esencial en el origen.

• Si f tiene una singularidad evitable en z_0 entonces, definiendo $f(z_0) = a_0$, f es analítica en $D(z_0; r)$ (ya que la serie de potencias que representa a f para $0 < |z - z_0| < r$ converge, de hecho, en un círculo abierto de radio $R \geq r$). En tal caso,

$$\lim_{z \to z_0} \big[(z - z_0) f(z)\big] = 0. \tag{3.7}$$

Recíprocamente, si f es analítica en un entorno reducido de z_0 y se verifica (3.7) entonces f tiene una singularidad evitable en z_0. En efecto, si $m \in \mathbf{N}$ el teorema de Cauchy generalizado proporciona

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int f(z)(z - z_0)^{m-1} dz = 0\,.$$

• Si f tiene un polo de orden p en z_0 entonces

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^p} \Bigg(b_p + b_{p-1}(z - z_0) + \cdots + b_1 (z - z_0)^{p-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{k+p} \Bigg) \equiv \frac{F(z)}{(z - z_0)^p},$$

siendo F analítica en un entorno de z_0 y $F(z_0) = b_p \neq 0$. En particular, $1/f$ tiene una singularidad evitable (cero de orden p) en z_0. Recíprocamente (véase el comentario al final de la demostración del teorema de Taylor) si f tiene un cero de orden $p > 0$ en z_0 entonces $1/f$ tiene un polo de orden p en z_0.

• *Si f tiene un polo de orden p en z_0 entonces*

$$\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty; \tag{3.8}$$

en particular, $|f|$ no está acotado en un entorno reducido de z_0. (3.8) *no* se cumple si f tiene una singularidad esencial en z_0. Por ejemplo, si $f(z) = e^{1/z}$ y $z_n = 1/(2n\pi i) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ se tiene $f(z_n) = 1$ para todo $n \in \mathbf{N}$.

Teorema de Casorati–Weierstrass. *Si f tiene una singularidad* esencial *en z_0 y $a \in \mathbf{C}$, existe una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $z_n \to z_0$ y $f(z_n) \to a$.*

Nota: de hecho (**teorema de Picard**), se puede encontrar una sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $z_n \to z_0$ y $f(z_n) = a$ para todo número complejo a, con a lo sumo una excepción (cf. $f(z) = e^{1/z}$).

• Supongamos que $f = g/h$, donde g y h son funciones analíticas en z_0 con ceros de orden n y $m \geq 1$, respectivamente, en dicho punto. Entonces existe $r > 0$ tal que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{(z-z_0)^n G(z)}{(z-z_0)^m H(z)} \equiv (z-z_0)^{n-m} R(z), \quad \text{si } 0 < |z - z_0| < r,$$

siendo $R \equiv G/H$ analítica (cociente de funciones analíticas con $H(z_0) \neq 0$) y no nula ($G(z_0) \neq 0$) en z_0. Por tanto, se tiene:

I) Si $n \geq m$, f tiene una singularidad evitable (cero de orden $n - m$) en z_0.

II) Si $n < m$, f tiene un polo de orden $m - n$ en z_0.

• Supongamos que $f = g \cdot h$, con g analítica en un entorno de z_0 y $g(z_0) \neq 0$, y sea z_0 una singularidad aislada de h. Entonces z_0 es una singularidad aislada de f, del mismo tipo que lo es para h.

En efecto, es claro que f tiene una singularidad aislada en z_0, ya que si h es analítica en $C(z_0; 0, r)$ $(r > 0)$ y g es analítica en $D(z_0; r)$ entonces $f \equiv g \cdot h$ es analítica en $C(z_0; 0, r)$. Si z_0 es una singularidad evitable de h entonces h coincide con una función analítica en un entorno reducido de z_0, y por tanto lo mismo ocurre con f. Si h tiene un polo de orden p en z_0 entonces $h(z) = (z - z_0)^{-p} H(z)$, con H analítica en un entorno de z_0 y $H(z_0) \neq 0 \Longrightarrow f(z) = (z - z_0)^{-p} \cdot g(z)\, H(z) \equiv (z - z_0)^{-p} F(z)$, con F analítica en un entorno de z_0 y $F(z_0) = g(z_0)H(z_0) \neq 0 \Longrightarrow f$ tiene un polo de orden p en z_0. Por último, si h tiene una singularidad esencial en z_0 entonces lo mismo ha de ocurrir con f, ya que en caso contrario $h = \frac{1}{g} \cdot f$ tendría una singularidad evitable ó un polo en z_0 (nótese que $1/g$ es analítica en un entorno de z_0, al ser $g(z_0) \neq 0$).

Capítulo 4

Cálculo de residuos

4.1. Métodos para el cálculo de residuos

• Sea $f(z) = g(z)/h(z)$, con g, h analíticas en un entorno de z_0, $g(z_0) \neq 0$, $h(z_0) = 0$ y $h'(z_0) \neq 0$. Entonces f tiene un *polo simple* en z_0, con residuo

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

En efecto, en un entorno de z_0 se tiene

$$h(z) = h'(z_0)(z - z_0) \cdot H(z),$$

con H analítica y $H(z_0) = 1$ (teorema de Taylor). Por tanto

$$f(z) = \frac{1}{h'(z_0)(z - z_0)} \cdot \frac{g(z)}{H(z)}.$$

Como g/H es analítica en z_0 ($H(z_0) \neq 0$), f tiene un polo simple en z_0 con residuo

$$\frac{1}{h'(z_0)} \cdot \frac{g(z_0)}{H(z_0)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)},$$

ya que $H(z_0) = 1$.

• Si f tiene un polo de orden n en z_0 entonces

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n \, f(z) \right]. \tag{4.1}$$

En efecto, en un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{z - z_0} + g(z),$$

con g analítica en z_0 (serie de Taylor). Por tanto en un entorno reducido de z_0 se cumple

$$(z - z_0)^n f(z) = b_n + \cdots + b_1 (z - z_0)^{n-1} + G(z) \equiv F(z),$$

donde $G(z) = (z - z_0)^n g(z)$ es analítica en z_0 y tiene un cero de orden $\geq n$ en dicho punto, y F es analítica en z_0. Por el teorema de Taylor,

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f; z_0) = b_1 = \frac{F^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} F^{(n-1)}(z) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z) \right].\end{aligned}$$

Ejercicio. Si $f = g/h$ con g y h analíticas en z_0, $h(z_0) = h'(z_0) = 0$ y $g(z_0) \neq 0$, $h''(z_0) \neq 0$, probar que f tiene un polo de orden 2 en z_0, con residuo

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = 2 \frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3} \frac{g(z_0)\, h'''(z_0)}{\left[h''(z_0) \right]^2}.$$

Solución. La función f tiene claramente un polo doble en z_0, por lo que podemos aplicar (4.1). Por el teorema de Taylor, en un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo

$$\frac{h(z)}{(z - z_0)^2} = h_2 + h_3(z - z_0) + H(z),$$

con H analítica y con un cero de orden por lo menos 2 en z_0. Aplicando (4.1) se obtiene entonces

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left[\frac{g(z)}{h_2 + h_3(z - z_0) + H(z)} \right] = \frac{h_2\, g'(z_0) - h_3\, g(z_0)}{h_2^2}.$$

Teniendo en cuenta que

$$h_2 = \frac{1}{2} h''(z_0), \qquad h_3 = \frac{1}{6} h'''(z_0)$$

se obtiene la fórmula anunciada.

4.2. Teorema de los residuos

Sean $z_1, \ldots, z_n$ n puntos distintos pertenecientes a una región A, y sea γ una curva cerrada (C^1 a trozos) homótopa a un punto en A y tal que ningún z_i está en γ. Si f es analítica en $A - \{z_1, \ldots z_n\}$ entonces se tiene:

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, z_k) \operatorname{Res}(f; z_k).$$

Demostración. Por el teorema de Laurent, para cada $i = 1, \ldots, n$ hay un entorno reducido $C(z_i; 0, \epsilon_i)$ de z_i en el que es válido el desarrollo

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}(z - z_i)^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{ik}(z - z_i)^k \equiv S_i(z) + f_i(z),$$

con f_i analítica en el disco $D(z_i; \epsilon_i)$. Además (por las propiedades de las series de Laurent) la serie que define la parte principal $S_i(z)$ converge absolutamente a una función analítica en $\mathbf{C} - \{z_i\}$ y uniformemente en el exterior de todo disco abierto centrado en z_i.

Sea

$$g(z) = f(z) - \sum_{k=1}^{n} S_k(z);$$

entonces g es analítica en $A - \{z_1, \ldots, z_n\}$, y además los puntos z_i son singularidades evitables de g. En efecto, para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene

$$g(z) = f_i(z) + S_i(z) - \sum_{k=1}^{n} S_k(z) = f_i(z) - \sum_{1 \le k \ne i \le n} S_k(z)\,, \qquad 0 < |z - z_i| < \epsilon_i\,.$$

Definiendo $g(z_i) = \lim_{z \to z_i} g(z)$ la función g es analítica en A, y por el teorema de Cauchy

$$0 = \int_\gamma g \iff \int_\gamma f = \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma S_k.$$

Consideremos ahora la integral $\int_\gamma S_k$. Al ser $\mathbf{C} - \gamma$ abierto, existe $\delta_k > 0$ tal que $D(z_k; \delta_k) \cap \gamma = \emptyset$. Por tanto, la serie de Laurent que define a S_k es uniformemente convergente en γ, lo que nos permite escribir

$$\begin{aligned}\int_\gamma S_k = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\gamma b_{kj}(z - z_k)^{-j}\,dz = \int_\gamma b_{k1}(z - z_k)^{-1}\,dz &= b_{k1} \cdot 2\pi i n(\gamma, z_k) \\ &= 2\pi i \cdot n(\gamma, z_k)\ \mathrm{Res}(f; z_k),\end{aligned}$$

donde se ha utilizado el teorema fundamental del Cálculo (para $j \ne 1$, $(z - z_k)^{-j}$ admite la primitiva $(z - z_k)^{1-j}/(1 - j)$ en $\mathbf{C} - \{z_k\}$) y la definición del índice. Esto completa la demostración. *Q.E.D.*

4.3. Cálculo de integrales definidas

4.3.1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

- **Condiciones:** f analítica en $H = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}\, z \ge 0\}$, con la posible excepción de un número *finito* de singularidades z_k *fuera del eje real,* y $\exists p > 1$, $R > 0$ y $M > 0$ t.q.

$$|f(z)| < \frac{M}{|z|^p} \qquad \forall z \in H,\ |z| > R.$$

- **Resultado:** $2\pi i \displaystyle\sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}(f; z_k).$

Demostración. Sea γ_r la semicircunferencia de radio r orientada positivamente, con $r > R$ lo suficientemente grande para que todas las singularidades (necesariamente aisladas) de f en H estén en el interior de γ_r.

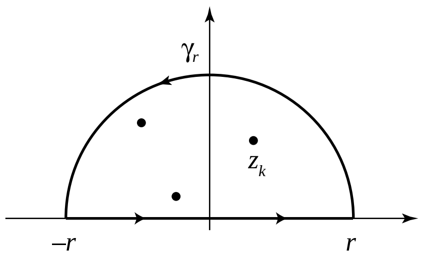

Figura 4.1: semicircunferencia γ_r

Entonces

$$\int_{\gamma_r} f = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) = \int_{-r}^{r} f(x)\,dx + \int_0^\pi f(re^{i\theta}) ire^{i\theta}\,d\theta.$$

Como $|f(x)| < M\,|x|^{-p}$ con $p > 1$ para $|x| > R$, la primera integral del miembro derecho converge a $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ cuando $r \to \infty$ (criterio de comparación). En cuanto a la segunda, su módulo está acotado por $M\pi r^{1-p}$, que tiende a 0 cuando $r \to \infty$. *Q.E.D.*

• **Notas:** i) Un resultado análogo vale intercambiando el semiplano superior H por el semiplano inferior $L = \{z \in \mathbf{C} : \operatorname{Im} z \le 0\}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{Res}(f; z_k).$$

ii) $f = P/Q$, con $P \neq 0$ y Q polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, cumple las condiciones anteriores (tanto en H como en L) si (y sólo si) $\deg Q \ge \deg P + 2$.

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$.

• $f(z) = z/(z^2+4z+13)^2 \equiv P/Q$, con singularidades (polos dobles) en los ceros $z = -2 \pm 3i \notin \mathbf{R}$ de Q. Además, $\deg Q = 4 \ge \deg P + 2 = 3$. Por tanto,

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2} = 2\pi i \operatorname{Res}(f; -2+3i).$$

• *Cálculo del residuo* ($z_0 = -2+3i$):

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^2}, \qquad \text{con} \quad g(z) = \frac{z}{(z+2+3i)^2};$$

como $g(z_0) \neq 0$, z_0 es un polo doble de f, con residuo

$$g'(z_0) = \frac{1}{(z_0+2+3i)^2} - \frac{2z_0}{(z_0+2+3i)^3} = \frac{2+3i-z_0}{(z_0+2+3i)^3} = \frac{4}{(6i)^3} = \frac{4i}{6^3}.$$

Por tanto, $I = -\dfrac{8\pi}{6^3} = -\dfrac{\pi}{27}$.

4.3.2. Integrales trigonométricas: $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$

• **Condiciones:** R función racional de dos variables cuyo denominador no se anula para todo $\theta \in [0, 2\pi)$.

• **Resultado:** $2\pi i \sum_{|z_k|<1} \operatorname{Res}(f; z_k)$, siendo $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}\left(z + z^{-1}\right), \frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right)\right)$
y denotando mediante $z_1, \ldots, z_n$ las singularidades de f (necesariamente en número finito, ya que f es una función racional).

Demostración. La función $f(z)$ no tiene singularidades en la circunferencia unidad γ, ya que si $\theta \in [0, 2\pi)$ entonces $f(e^{i\theta}) = -ie^{-i\theta} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Parametrizando $\int_\gamma f$ en la forma usual ($z = e^{i\theta}$) se obtiene

$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\, d\theta\,.$$

El resultado anunciado se sigue del teorema de los residuos, ya que al ser f una función racional de z tiene un número finito de singularidades. *Q.E.D.*

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\operatorname{sen}\theta)^2}\,.$

$$f(z) = \frac{1}{iz\left[5 - \frac{3}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]^2} = \frac{4iz}{(3z^2 - 10iz - 3)^2} = \frac{4iz}{9\left(z - \frac{i}{3}\right)^2 (z - 3i)^2}\,.$$

Por tanto, la integral vale

$$I = -\frac{8\pi}{9} \operatorname{Res}\left(g; \frac{i}{3}\right), \quad \text{con} \quad g(z) = \frac{z}{(z - 3i)^2} \cdot \frac{1}{\left(z - \frac{i}{3}\right)^2} \equiv \frac{h(z)}{\left(z - \frac{i}{3}\right)^2}\,.$$

El residuo es igual a

$$h'(i/3) = \frac{1}{\left(\frac{i}{3} - 3i\right)^2} - \frac{\frac{2i}{3}}{\left(\frac{i}{3} - 3i\right)^3} = \frac{\frac{i}{3} - 3i - \frac{2i}{3}}{\left(\frac{i}{3} - 3i\right)^3} = \frac{-\frac{10i}{3}}{-\frac{8^3}{3^3} i^3} = -\frac{10 \cdot 3^2}{8^3}\,.$$

Por tanto $I = \dfrac{10\pi}{8^2} = \dfrac{5\pi}{32}\,.$

4.3.3. Transformadas de Fourier: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\, dx$

• **Condiciones:** $\omega > 0$; f analítica en H, con la posible excepción de un número *finito* de singularidades $z_k \notin \mathbf{R}$ y $|f(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ en H, i.e.

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists R > 0 \ \text{ t.q. } \ |f(z)| < \epsilon \text{ si } |z| > R \text{ y } z \in H.$$

• **Resultado:** $2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(e^{i\omega z} f(z); z_k)$.

Demostración. Dado $\epsilon > 0$, sea γ el rectángulo de vértices $-x_1, x_2, x_2 + i\,y_1, -x_1 + i\,y_1$ (orientado positivamente), con x_1, x_2, y_1 mayores que R y lo suficientemente grandes para que todas las singularidades de f en H estén en el interior de γ (fig. 4.2).

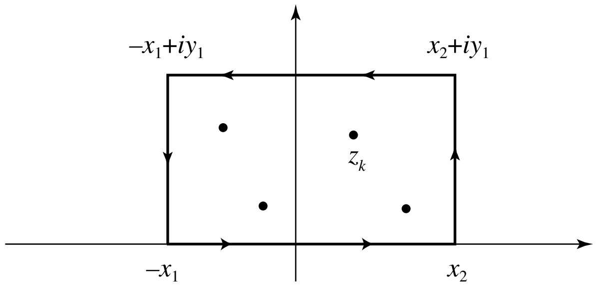

Figura 4.2: rectángulo γ

Entonces

$$
\begin{aligned}
\int_\gamma e^{i\omega z} f(z)\,dz &= 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(e^{i\omega z} f(z); z_k) \\
&= \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\,dx + i \int_0^{y_1} e^{i\omega(x_2+iy)} f(x_2 + i\,y)\,dy \\
&\quad - \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega(x+iy_1)} f(x + i\,y_1)\,dx - i \int_0^{y_1} e^{i\omega(-x_1+iy)} f(-x_1 + i\,y)\,dy \\
&\equiv I_1 + I_2 - I_3 - I_4.
\end{aligned}
$$

Si y_1 se escoge lo suficientemente grande para que $(x_1 + x_2)e^{-\omega y_1} < 1/\omega$ se tiene:

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\le \epsilon \int_0^{y_1} e^{-\omega y}\,dy = \frac{\epsilon}{\omega}(1 - e^{-\omega y_1}) < \frac{\epsilon}{\omega}, \\
|I_3| &\le \epsilon\,(x_1 + x_2)\,e^{-\omega y_1} < \frac{\epsilon}{\omega}, \\
|I_4| &\le \frac{\epsilon}{\omega}(1 - e^{-\omega y_1}) < \frac{\epsilon}{\omega}\,.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$
\left| \int_{-x_1}^{x_2} e^{i\omega x} f(x)\,dx - 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(e^{i\omega z} f(z); z_k) \right| < \frac{3\epsilon}{\omega}\,.
$$

Como $\epsilon > 0$ es arbitrario, haciendo x_1 y x_2 tender a infinito por separado se obtiene el resultado deseado. *Q.E.D.*

• **Notas:** i) Si $\omega < 0$, se obtiene un resultado análogo intercambiando el semiplano superior H por el semiplano inferior L:

$$
\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{Res}(e^{i\omega z} f(z); z_k).
$$

ii) $f = P/Q$, con $P \neq 0$ y Q polinomios y $Q(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$, cumple las condiciones anteriores (tanto en H como en L) si (y sólo si) $\deg Q \ge \deg P + 1$.

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(\omega x)}{x^4 + x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(\omega x)}{x^4 + x^2 + 1}\,dx \equiv I(\omega),\ \ \omega > 0\,.$

La integral es la parte real de

$$J = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega x}}{x^4 + x^2 + 1}\, dx\,.$$

Podemos aplicar lo anterior a la función racional $f(z) = \frac{1}{2}(z^4 + z^2 + 1)$ en el semiplano superior (f no tiene singularidades en el eje real). Las singularidades (polos) de f se calculan resolviendo la ecuación

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff z^2 = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) = e^{\pm\frac{2\pi i}{3}} \iff z = \pm e^{\pm\frac{\pi i}{3}}\,.$$

Las únicas singularidades en el semiplano superior son

$$z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \qquad z_2 = -e^{-\frac{\pi i}{3}} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3}) = -\bar{z}_1\,.$$

El residuo de $e^{i\omega z}f(z)$ en cualquiera de estas singularidades z_i se calcula fácilmente, ya que $e^{i\omega z}f(z) = g(z)/h(z)$ con $g(z_i) \neq 0$, $h(z_i) = 0$ y $h'(z_i) \neq 0$:

$$\operatorname{Res}(f; z_i) = \frac{1}{4}\,\frac{e^{i\omega z_i}}{z_i(2z_i^2 + 1)}\,.$$

De esto se deduce que

$$J = \frac{\pi i}{2}\left[\frac{e^{i\omega z_1}}{z_1(2z_1^2 + 1)} - \frac{e^{-i\omega \bar{z}_1}}{\bar{z}_1(2\bar{z}_1^2 + 1)}\right] = -\pi\, \operatorname{Im}\left[\frac{e^{i\omega z_1}}{z_1(2z_1^2 + 1)}\right] \equiv -\pi\, \operatorname{Im} A.$$

Como

$$A = \frac{2e^{\frac{i\omega}{2}(1+i\sqrt{3})}}{(1+i\sqrt{3})i\sqrt{3}} = \frac{2e^{\frac{\omega}{2}(i-\sqrt{3})}}{\sqrt{3}(i-\sqrt{3})} = -\frac{i+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}e^{\frac{\omega}{2}(i-\sqrt{3})},$$

se obtiene

$$I = \operatorname{Re} J = J = -\pi\, \operatorname{Im} A = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}\omega}\left(\cos\frac{\omega}{2} + \sqrt{3}\,\operatorname{sen}\frac{\omega}{2}\right), \qquad \omega > 0\,.$$

4.3.4. Transformadas de Mellin: $\int_0^\infty x^{a-1}f(x)\,dx$, $a \notin \mathbf{Z}$

• **Condiciones:** i) f analítica en $\mathbf{C}$, con la posible excepción de un número *finito* de singularidades $z_k \notin \mathbf{R}_+$, y ii) $\exists M_1, M_2, R_1 > R_2$ constantes positivas y $c < a < b$ tales que

$$|f(z)| < \begin{cases} \dfrac{M_1}{|z|^b}, & |z| > R_1 \\[2ex] \dfrac{M_2}{|z|^c}, & 0 < |z| < R_2. \end{cases}$$

• **Resultado:** $-\dfrac{\pi e^{-i\pi a}}{\operatorname{sen}(\pi a)} \displaystyle\sum_{z_k \neq 0} \operatorname{Res}(z^{a-1}f(z); z_k), \qquad z^{a-1} \equiv e^{(a-1)\log_{[0,2\pi)} z}.$

Demostración. En primer lugar, las acotaciones de $|f|$ implican (por el teorema de comparación para integrales reales impropias) que la integral es absolutamente convergente.

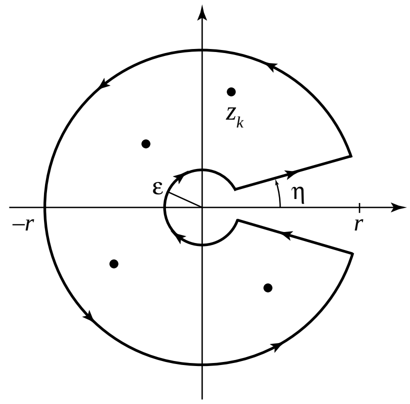

Figura 4.3: curva γ

Sea γ la curva de la fig. 4.3, donde $0 < \epsilon < R_1$ y $r > R_2$ se toman de modo que todas las singularidades de $z^{a-1} f(z)$ distintas de 0 estén en el interior de γ, y $0 < \eta < \pi/2$. Si denotamos

$$z^{a-1} = e^{(a-1)\log_{[0,2\pi)} z} = |z|^{a-1}\, e^{i(a-1)\arg_{[0,2\pi)} z},$$

la función $z^{a-1} f(z)$ es analítica en $\mathbf{C} - (\mathbf{R}_+ \cup \{0\})$, salvo en las singularidades z_k de f. Por el teorema de los residuos se tiene:

$$2\pi i \sum_{z_k \neq 0} \operatorname{Res}(z^{a-1} f(z); z_k) = I_1 - I_2 + J,$$

siendo I_1 e I_2 las integrales de $z^{a-1} f(z)$ sobre los arcos $\arg_{[0,2\pi)} z \in [\eta, 2\pi - \eta]$ de las circunferencias (orientadas positivamente) de radios r y ϵ, respectivamente, y J la integral a lo largo de los segmentos:

$$\begin{aligned} J &= \int_\epsilon^r e^{i(a-1)\eta} x^{a-1} f(xe^{i\eta}) \cdot e^{i\eta}\, dx - \int_\epsilon^r e^{i(a-1)(2\pi-\eta)} x^{a-1} f(xe^{i(2\pi-\eta)}) \cdot e^{i(2\pi-\eta)}\, dx \\ &= \int_\epsilon^r x^{a-1} \left[e^{ia\eta} f(xe^{i\eta}) - e^{ia(2\pi-\eta)} f(xe^{i(2\pi-\eta)}) \right] dx\,. \end{aligned}$$

Haciendo $\eta \to 0+$ (con ϵ y r fijos) se obtiene

$$2\pi i \sum_{z_k \neq 0} \operatorname{Res}(z^{a-1} f(z); z_k) = \int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z)\, dz - \int_{\gamma_\epsilon} z^{a-1} f(z)\, dz + (1 - e^{2\pi i a}) \int_\epsilon^r x^{a-1} f(x)\, dx\,,$$

siendo γ_ρ la circunferencia de centro 0 y radio ρ orientada positivamente. Por las hipótesis sobre $|f|$ se obtiene:

$$\left| \int_{\gamma_r} z^{a-1} f(z)\, dz \right| \leq M_1 r^{a-1-b} \cdot 2\pi r = 2\pi M_1 r^{a-b} \xrightarrow[r\to\infty]{} 0,$$

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} z^{a-1} f(z)\, dz \right| \leq M_2 \epsilon^{a-1-c} \cdot 2\pi \epsilon = 2\pi M_2 \epsilon^{a-c} \xrightarrow[\epsilon\to 0+]{} 0\,.$$

Haciendo $\epsilon \to 0+$ y $r \to \infty$ (independientemente) se obtiene el resultado deseado, ya que

$$\frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i a}} = \frac{2\pi i e^{-i\pi a}}{e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}} = -\frac{\pi e^{-i\pi a}}{\operatorname{sen}(\pi a)}\,.$$

Q.E.D.

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x^2}\,dx \equiv I(a)\,.$

En este caso $b = 2$, $c = 0$. Para poder aplicar el resultado del apartado anterior necesitamos que $0 < a < 2$ y $a \neq 1$. Si esto se cumple se tiene:

$$I(a) = -\frac{\pi e^{-i\pi a}}{\operatorname{sen}(\pi a)} \left[\operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}; i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}; -i\right)\right].$$

Los residuos se calculan fácilmente, ya que ambos son claramente polos simples:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{a-1}}{z^2+1}; \pm i\right) = \frac{(\pm i)^{a-1}}{\pm 2i}.$$

La suma de estos dos residuos es igual a

$$\frac{1}{2i}\left(e^{i(a-1)\frac{\pi}{2}} - e^{i(a-1)\frac{3\pi}{2}}\right) = -\frac{1}{2}\left(e^{ia\frac{\pi}{2}} + e^{ia\frac{3\pi}{2}}\right) = -e^{i\pi a}\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right).$$

Por tanto,

$$I(a) = \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)}{\operatorname{sen}(\pi a)} = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi a}{2}\right)}\,.$$

En particular, haciendo $a = 2/5$ se obtiene:

$$\int_0^\infty \frac{x^{-3/5}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2\operatorname{sen}(\pi/5)} = \frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \frac{\pi}{\sqrt{10}}\sqrt{5+\sqrt{5}}\,.$$

4.4. Valor principal de Cauchy

Supongamos que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es no acotada en un entorno de $x_0 \in \mathbf{R}$, y que existen las integrales impropias $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_c^\infty f(x)\,dx$ para todo $b < x_0 < c$. En ese caso,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0+}\int_{x_0+\delta}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Evidentemente, si la integral impropia existe entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^{\infty} f(x)\,dx\right].$$

El miembro derecho se denomina **valor principal de Cauchy** de la integral impropia:

$$\text{V. P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left[\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\epsilon}^{\infty} f(x)\,dx\right].$$

(Esta definición se generaliza de manera obvia al caso en que f tiene un número *finito* de singularidades en el eje real.) *Si* existe la integral impropia entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

Sin embargo, el valor principal de Cauchy puede existir aunque no exista la integral impropia: por ejemplo, si f es una función *impar* e integrable en ∞ entonces $\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 0$.

Lema 4.1. *Supongamos que f es una función analítica con un* polo simple *en $z_0 \in \mathbf{C}$, y sea γ_ϵ el arco de circunferencia $\gamma_\epsilon(t) = z_0 + \epsilon\, e^{it}$, con $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ (fig. 4.4). Entonces*

$$\lim_{\epsilon\to 0+} \int_{\gamma_\epsilon} f = \alpha i \operatorname{Res}(f; z_0).$$

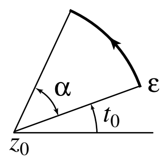

Figura 4.4: curva γ_ϵ

Demostración. En un entorno reducido de z_0 es válido el desarrollo de Laurent

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + g(z), \qquad 0 < |z - z_0| < r,$$

con g analítica en $D(z_0; r)$. Si $0 < \epsilon < r$ se tiene

$$\int_{\gamma_\epsilon} f = b_1 \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z - z_0} + \int_{\gamma_\epsilon} g\,.$$

Pero

$$b_1 \int_{\gamma_\epsilon} \frac{dz}{z - z_0} = b_1 \int_{t_0}^{t_0+\alpha} \frac{i\epsilon e^{it}}{\epsilon e^{it}}\,dt = i\,b_1\alpha = i\alpha \operatorname{Res}(f; z_0),$$

mientras que, al ser g analítica en $D(z_0; r)$, $|g(z)| < M$ para $|z - z_0| \le r/2$, y por tanto

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon} g\right| \le M\epsilon\alpha \xrightarrow[\epsilon\to 0+]{} 0\,.$$

Q.E.D.

• Sea f una función analítica en H, excepto por un número *finito* de singularidades z_k, siendo las posibles singularidades de f en el eje real *polos simples*. Si f satisface una de las dos condiciones siguientes:

i) $\exists p > 1$, $R > 0$, $M > 0$ t.q. $|f(z)| < \dfrac{M}{|z|^p}$ si $|z| > R$ y $z \in H$;

ii) $f(z) = e^{i\omega z} g(z)$, con $\omega > 0$ y $|g(z)| \to 0$ cuando $|z| \to \infty$ en H,

entonces

$$\mathrm{V.\,P.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) + \pi i \sum_{z_k \in \mathbf{R}} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

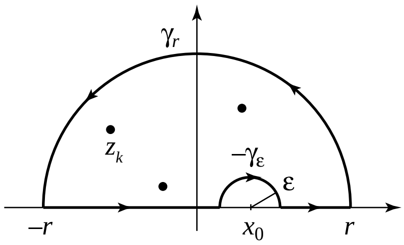

Figura 4.5: curva γ

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que f cumple la condición i). Por sencillez, nos restringiremos al caso en que f sólo tiene una singularidad x_0 en el eje real. Si $r > \max(x_0, R)$ es lo suficientemente grande para que todas las singularidades de f en $H - \{x_0\}$ estén en el interior de γ_r y $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, integrando f a lo largo de la curva γ de la fig. 4.5 se tiene:

$$\int_\gamma f = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) = \int_{-r}^{x_0-\epsilon} f(x)\, dx - \int_{\gamma_\epsilon} f + \int_{x_0+\epsilon}^{r} f(x)\, dx + \int_{\gamma_r} f\,.$$

Por la discusión de la sección 4.3.1, las integrales $\int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)\, dx$ y $\int_{x_0+\epsilon}^{\infty} f(x)\, dx$ son convergentes, y

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} f = 0.$$

Por tanto,

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) = \int_{-\infty}^{x_0-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{x_0+\epsilon}^{\infty} f(x)\, dx - \int_{\gamma_\epsilon} f\,.$$

El resultado anunciado se obtiene haciendo $\epsilon \to 0+$ y utilizando el lema anterior. *Q.E.D.*

- **Nota:** Si reemplazamos H por L y $\omega > 0$ por $\omega < 0$ entonces

$$\text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f; z_k) - \pi i \sum_{z_k \in \mathbf{R}} \operatorname{Res}(f; z_k)\,.$$

- **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\, dx \equiv I\,.$

Si definimos $f(x) = \operatorname{sen} x / x$ para $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ entonces f es continua en 0 y par, y por tanto

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\,.$$

Al ser f continua en 0

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

si el miembro derecho existe. En tal caso

$$I = \frac{1}{2} \text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left[\text{V. P.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \right] \equiv \frac{1}{2} \operatorname{Im} J\,.$$

La función $f(z) = \operatorname{sen} z/z$ tiene una singularidad evitable en $z = 0$, pero no cumple las condiciones i) ó ii). Sin embargo, $g(z) = e^{iz}/z$ tiene un polo simple en el origen y cumple la condición ii) del apartado anterior, por lo que

$$J = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}; 0\right) = \pi i \cdot 1 \Longrightarrow I = \frac{\pi}{2}\,.$$

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\, dx \equiv I\,.$

Si f es la función del apartado anterior

$$I = \frac{1}{2}\,\text{V. P.} \int_{-\infty}^\infty f^2(x)\, dx = \frac{1}{4}\,\text{V. P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{1-\cos(2x)}{x^2}\, dx$$
$$= \frac{1}{4} \operatorname{Re}\left[\text{V. P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\, dx\right] \equiv \frac{1}{4} \operatorname{Re} J.$$

Si $g(z) = (1 - e^{2iz})/z^2$ entonces

$$|g(z)| \le \frac{1 + \left|e^{2iz}\right|}{|z|^2} \le \frac{2}{|z|^2}, \qquad \operatorname{Im} z \ge 0,\ \ z \ne 0,$$

y por tanto se cumple la condición i) en el semiplano superior. Además, $z = 0$ es un polo simple de g (el numerador tiene un cero simple y el denominador uno doble en el origen), con residuo

$$\operatorname{Res}(g; 0) = -2ie^{2iz}\big|_{z=0} = -2i.$$

Por tanto,

$$J = \pi i \cdot (-2i) = 2\pi \Longrightarrow I = \frac{\pi}{2}\,.$$

• **Ejemplo:** $\displaystyle\text{V. P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(x-1)(x^2+4)} \equiv I\,.$

Aquí

$$I = \operatorname{Im} J, \qquad J \equiv \text{V. P.} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}\, dx}{(x-1)(x^2+4)}\,.$$

La función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z-1)(z^2+4)}$$

es analítica en $\mathbf{C} - \{1, \pm 2i\}$, y la singularidad en $z = 1$ es claramente un polo simple. Además, se cumple claramente la condición ii) en el semiplano superior, por lo que

$$J = \pi i \left[\operatorname{Res}(f; 1) + 2 \operatorname{Res}(f; 2i)\right] = \pi i \left[\frac{e^i}{5} + \frac{2e^{-2}}{(2i-1)\cdot 4i}\right]$$
$$= \pi i \left[\frac{e^i}{5} - \frac{e^{-2}}{2(2+i)}\right] = \pi i \left[\frac{e^i}{5} - \frac{(2-i)e^{-2}}{10}\right]\,.$$

Por tanto

$$I = \frac{\pi}{5}\left(\cos 1 - \frac{1}{e^2}\right)\,.$$

4.4.1. $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\log x\,dx$, f real y par

• **Condiciones:** i) f analítica en H, con la posible excepción de un número *finito* de singularidades $z_k \notin \mathbf{R} - \{0\}$, y ii) $\exists M_1, M_2, R_1 > R_2$ constantes positivas y $a < 1 < b$ tales que

$$|f(z)| < \begin{cases} \dfrac{M_1}{|z|^b}, & |z| > R_1 \\ \dfrac{M_2}{|z|^a}, & 0 < |z| < R_2. \end{cases}$$

• **Resultado:** $-\pi \operatorname{Im}\left[\sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z)\log z; z_k)\right]$, $\qquad \log \equiv \log_{[-\pi/2, 3\pi/2)}$.

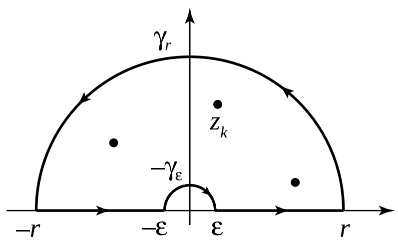

Figura 4.6: curva γ

Demostración. En primer lugar, las acotaciones sobre $|f|$ implican (teorema de comparación) la convergencia de la integral, así como la de $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$. Sean $0 < \epsilon < R_1 < R_2 < r$ tales que todas las singularidades de f en $H - \{0\}$ estén el interior de γ (ver fig. 4.6). Entonces

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z)\log z; z_k) = I_1 + I_2 - \int_{\gamma_\epsilon} g + \int_{\gamma_r} g\,, \tag{4.2}$$

siendo $g(z) = f(z)\,\log z$. Si $x < 0$ se tiene

$$\log x = \log|x| + i\pi = \log(-x) + i\pi\,,$$

y por tanto

$$I_1 = \int_{-r}^{-\epsilon} f(x)[\log(-x) + i\pi]\,dx = \int_\epsilon^r f(-x)[\log(x) + i\pi]\,dx$$
$$= \int_\epsilon^r f(x)\log x\,dx + i\pi\int_\epsilon^r f(x)\,dx\,.$$

Luego

$$I_1 + I_2 = 2\int_\epsilon^r f(x)\log x\,dx + i\pi\int_\epsilon^r f(x)\,dx\,.$$

Por otra parte,

$$|\log z| = \big|\log|z| + i\arg z\big| \le |\log z| + |\arg z|\,,$$

donde $\arg z \in [-\pi/2, 3\pi 2)$. Por tanto

$$\left|\int_{\gamma_r} g\right| \le \pi r \cdot \frac{M_1}{r^b} \cdot (\log r + \pi) = \frac{\pi M_1}{r^{b-1}} \cdot (\log r + \pi) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0\,,$$

al ser $b > 1$. Del mismo modo, al ser $a < 1$ se tiene

$$\left|\int_{\gamma_\epsilon} g\right| \le \pi \epsilon \cdot \frac{M_2}{\epsilon^a} \cdot (\log \epsilon + \pi) = \pi M_2 \epsilon^{1-a} \cdot (\log \epsilon + \pi) \xrightarrow[\epsilon\to 0+]{} 0\,.$$

Haciendo $r \to \infty$ y $\epsilon \to 0+$ en (4.2) se obtiene:

$$2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z)\log z; z_k) = 2\int_0^\infty f(x)\log x\, dx + i\pi \int_0^\infty f(x)\, dx\,.$$

Teniendo en cuenta que f es *real* se obtiene el resultado anunciado. *Q.E.D.*

• **Ejemplo:** $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{(x^2+1)^2}\, dx \equiv I\,.$

Claramente $f(z) = (1+z^2)^{-2}$ cumple todas las condiciones anteriores ($a = 0$ y $b = 4$). La única singularidad en el semiplano superior es $z_0 = i$. Como

$$f(z)\log z = \frac{\log z}{(z+i)^2} \cdot \frac{1}{(z-i)^2}$$

se tiene

$$\operatorname{Res}(f(z)\log z; i) = \frac{d}{dz}\left[\frac{\log z}{(z+i)^2}\right]_{z=i} = \frac{1}{i(2i)^2} - \frac{2\log i}{(2i)^3} = \frac{i}{4} - \frac{i}{4}\log i = \frac{i}{4} + \frac{\pi}{8}\,.$$

Por tanto, $I = -\dfrac{\pi}{4}$.